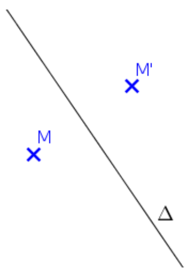
Chapitre 1

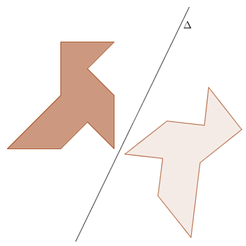
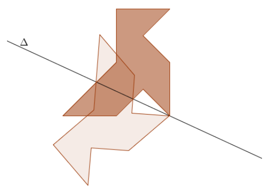
Transformation du plan, Thalès

1.1 Les transformations du plan

1.1.1 Symétrie axiale

Définition 1. Soient une droite Δ et un point M n'appartenant pas à Δ.
Le symétrique du point M par rapport à la droite Δ est le point M' tel que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.



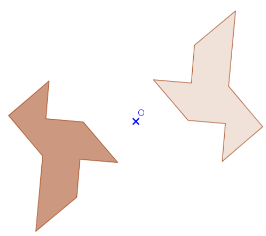
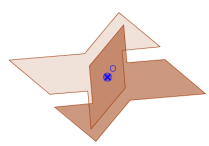



Remarque.

1. Lorsque le point M appartient à la droite Δ, son symétrique est le point M lui-même.
2. En sixième, on parle souvent de « pliage » ou de « miroir ».
3. On peut dire : « M' est le symétrique de M par rapport à Δ » ou « M' est l'image de M par la symétrie d'axe Δ ».

1.1.2 Symétrie centrale

Définition 2. Soient deux points O et M distincts.
Le symétrique du point M par rapport au point O est le point M' tel que O soit le milieu du segment $[MM']$.

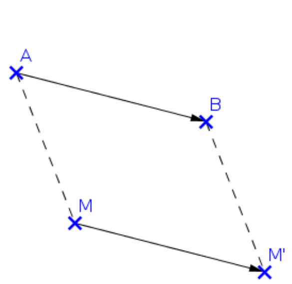



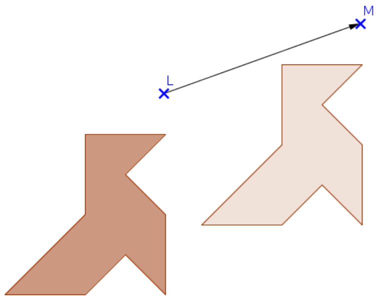
Remarque.

1. En cinquième, on dit souvent qu'on fait un « demi-tour autour du point O ».
2. On peut dire : « M' est le symétrique de M par rapport à O » ou « M' est l'image de M par la symétrie de centre O ».

1.1.3 Translation

Définition 3. Soient trois points distincts A, B et M.
L'image du point M par la translation qui transforme A en B est le point M' tel que le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme.





Remarque. Une translation est donc simplement un « glissement ». L'image n'est pas déformée, ni retournée.

1.1.4 Rotation

Définition 4. Le sens direct est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Le sens indirect est le sens des aiguilles d'une montre.

Définition 5. Soient deux points distincts M et O.
L'image du point M par la rotation de centre O et d'angle α dans le sens direct (resp. indirect) est le point M' tel que $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$ avec l'angle $\widehat{MOM'}$ qui « tourne » dans le sens direct (resp. indirect).

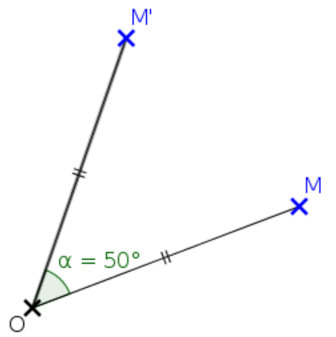


FIGURE 1.1 – M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle 50^o dans le sens direct

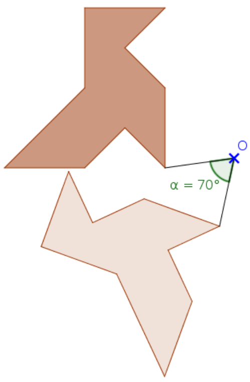


FIGURE 1.2 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par la rotation de centre O et d'angle 70^o dans le sens direct

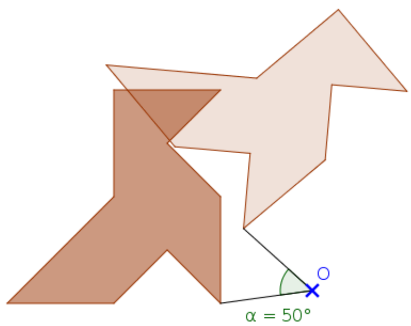


FIGURE 1.3 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par la rotation de centre O et d'angle 50^o dans le sens indirect

Remarque.

1. Une rotation d'angle α dans le sens direct est équivalente à une rotation d'angle $360^o - \alpha$ dans le sens indirect.
2. Une rotation d'angle 180^o dans le sens direct ou indirect est une symétrie centrale.

1.1.5 Propriétés des isométries du plan

Définition 6. Une isométrie du plan est une transformation qui conserve les longueurs.

Remarque. Si l'image d'un segment par une transformation du plan est un segment de même longueur, cette transformation est donc une isométrie.

Propriété 1. *Les symétries axiales et centrales, les translations et les rotations sont des isométries.*

Propriété 2. *Les images par une isométrie de deux droites parallèles sont parallèles.*
On dit que : « Une isométrie conserve le parallélisme. ».

Propriété 3. *L'image d'un angle par une isométrie est un angle de même mesure.*
On dit que : « Une isométrie conserve les angles. ».

1.1.6 Homothétie

Définition 7. Soient deux points distincts O et M et un nombre k.
L'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k est le point M' tel que :
- les points M, O et M' sont alignés
- si $k > 0$, M et M' sont du même côté de O et $OM' = kOM$
- si $k < 0$, O est entre M et M' et $OM' = -kOM$.

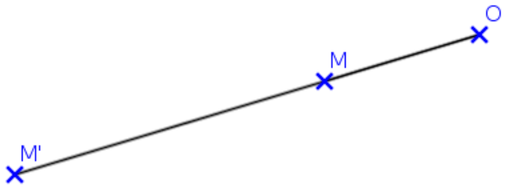


FIGURE 1.4 – M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3

FIGURE 1.5 – M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport -4

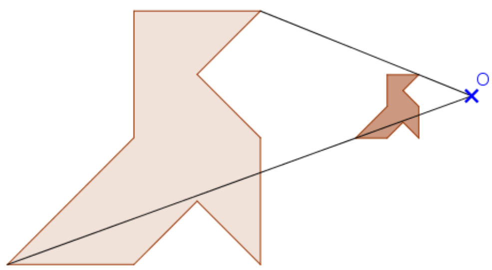


FIGURE 1.6 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par l'homothétie de centre O et de rapport 4

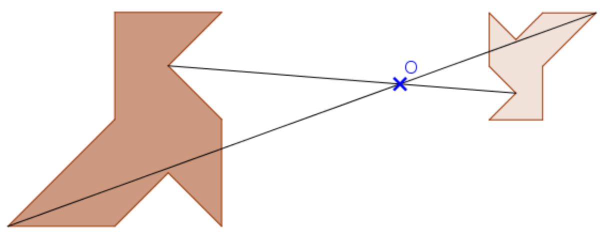


FIGURE 1.7 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par l'homothétie de centre O et de rapport $-0,5$

Remarque.

1. Si $k > 1$ ou si $k < -1$, l'image est un agrandissement de la figure initiale.

2. Si $-1 < k < 1$, l'image est une réduction de la figure initiale.
3. Si $k = -1$, l'homothétie est une symétrie centrale.
4. Si $k = 1$, l'homothétie ne modifie pas la figure initiale.
5. L'homothétie n'est pas une isométrie.

Propriété 4. *(admise) Une homothétie transforme une droite (d) en une droite (d') parallèle à (d).*

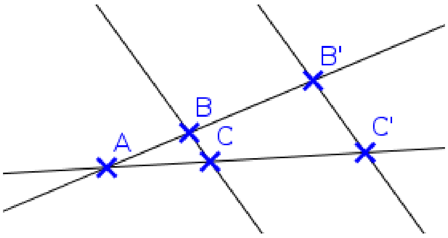


FIGURE 1.8 – B' et C' sont les images respectivement de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $2,5$

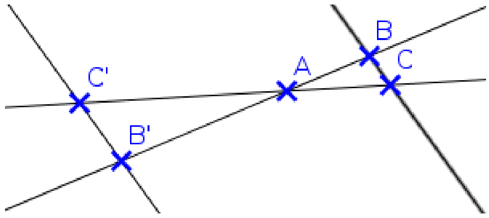
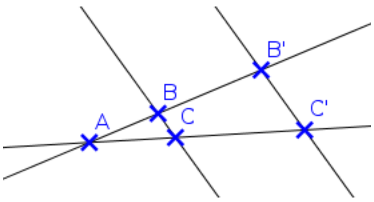


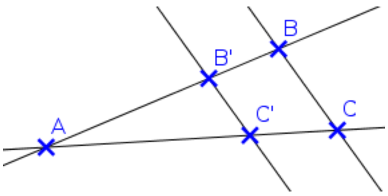
FIGURE 1.9 – B' et C' sont les images respectivement de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport -2

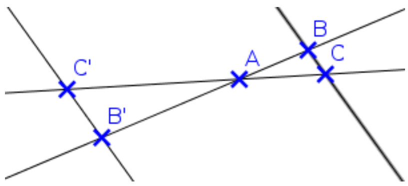
1.2 Théorème de Thalès et réciproque

1.2.1 Théorème de Thalès

Remarque. Si deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles, elles définissent deux triangles. Le théorème de Thalès nous permet de dire que les longueurs des côtés de ces deux triangles sont proportionnelles.



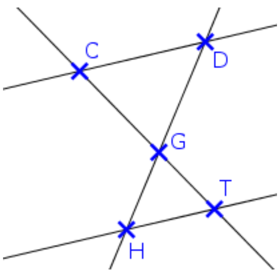




Propriété 5. *(admise) Si les points A, B, et B' sont alignés ainsi que les points A, C et C', et si les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on a :*

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Exemple 1.



Sur la figure ci-contre, les droites (CD) et (HT) sont parallèles. On donne $DG = 25\ mm$; $GH = 45\ mm$; $HT = 27\ mm$. Calculer CD.

Les points C, G et T sont alignés ainsi que les points D, G et H et les droites (CD) et (HT) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{GC}{GT} = \dfrac{GD}{GH} = \dfrac{CD}{HT}$

$\dfrac{25}{45} = \dfrac{CD}{27}$ $\qquad$ $CD = \dfrac{27 \times 25}{45}$ $\qquad$ donc $CD = 15\ mm$

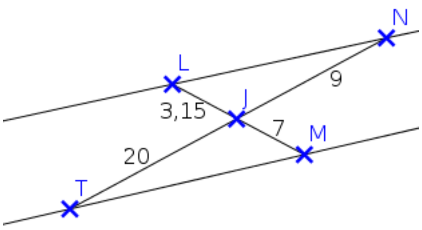
1.2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Remarque. La réciproque du théorème de Thalès permet de prouver que deux droites sont parallèles. Attention, il faut une condition dans l'ordre d'alignement des points pour pouvoir l'appliquer.

Propriété 6. *Si les points A, B, et M sont alignés dans le même ordre que les points A, C et N, et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.*

Remarque. Attention, quand on calcule séparément les quotients $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$, il faut garder les valeurs exactes (et ne jamais arrondir !).

Exemple 2.



Montrer que les droites (LN) et (TM) sont parallèles.

Les points L, J et M sont alignés dans le même ordre que les points N, J et T. De plus :

D'une part : $\dfrac{JL}{JM} = \dfrac{3,15}{7} = \dfrac{9}{20}$

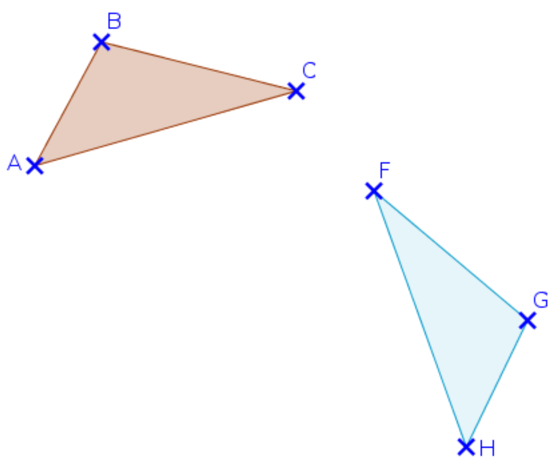
D'autre part : $\dfrac{JN}{JT} = \dfrac{9}{20}$

On remarque que $\dfrac{JL}{JM} = \dfrac{JN}{JT}$, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (LN) et (TM) sont parallèles.

1.3 Triangles semblables

1.3.1 Cas d'égalités des triangles

Définition 8. Deux triangles sont dits égaux (ou superposables) s'ils ont leurs côtés respectifs de même longueur.



Propriété 7. *Deux triangles superposables ont les mêmes mesures d'angles et la même aire.*

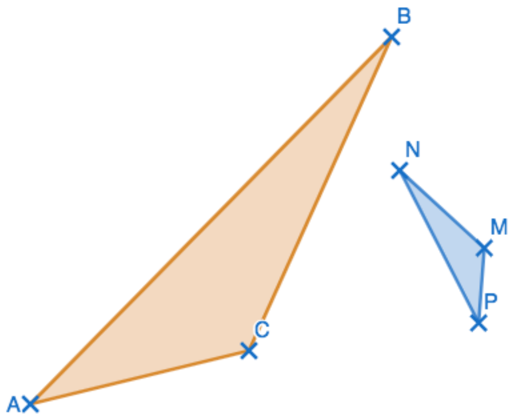
Propriété 8. *Une isométrie transforme un triangle en un triangle superposable au premier.*

Propriété 9. *Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectifs égaux, alors ils sont superposables.*

Propriété 10. *Si deux triangles ont un côté égal compris entre deux angles respectifs égaux, alors ils sont superposables.*

1.3.2 Triangles semblables

Définition 9. Deux triangles sont semblables si leurs angles respectifs sont égaux.



Remarque.
- Pour que deux triangles soient semblables, il suffit d'avoir l'égalité sur deux paires d'angles.
- Deux triangles superposables sont semblables.
- Dans une configuration de Thalès, on a deux triangles semblables.

Définition 10. Lorsque deux triangles sont semblables :
- un angle d'un triangle et l'angle de même mesure de l'autre triangle sont dits homologues ;
- les sommets (ou les côtés opposés) de deux angles homologues sont aussi dits homologues.

Propriété 11. *Une homothétie transforme un triangle en un triangle qui lui est semblable.*

Propriété 12. *Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés respectifs sont proportionnels.*

Propriété 13. *Si deux triangles ont leurs côtés respectifs proportionnels, alors ils sont semblables.*