

Chapitre 3

Géométrie dans l'espace

3.1 Les différents solides

Définition 20. Un polyèdre est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

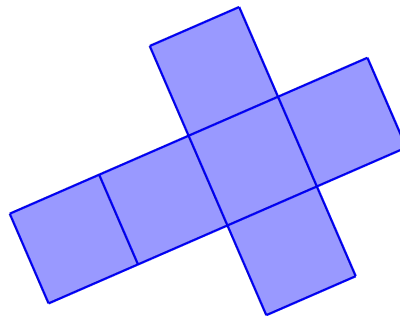
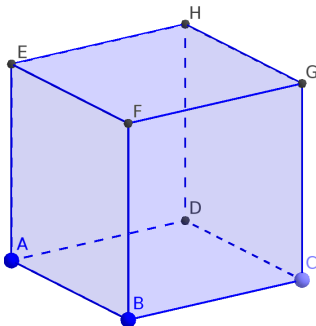
Définition 21. Un polyèdre est dit régulier si toutes ses faces sont identiques et régulières (i.e. côtés de la même longueur et angles de la même mesure) et si tous les sommets sont identiques (i.e. même nombre d'arêtes qui convergent à chaque sommet).

3.1.1 Le cube

Définition 22. Un cube est un polyèdre régulier dont toutes les faces sont des carrés.

Remarque. Le cube a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Toutes les faces sont des carrés identiques.

Propriété 28. Le volume d'un cube d'arête c est : $V = c^3$



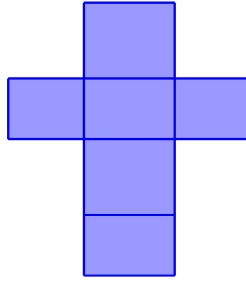
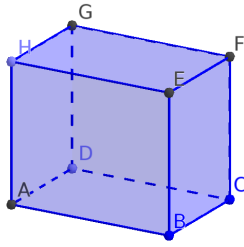
Il y a 11 patrons de cube différents.

3.1.2 Le parallélépipède rectangle

Définition 23. Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont toutes les faces sont des rectangles.

Remarque. Le parallélépipède rectangle est aussi appelé le pavé droit. Il a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Ses faces sont des rectangles identiques deux à deux. Le cube est un cas particulier de pavé droit.

Propriété 29. Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur l , de largeur L , et de hauteur h est : $V = l \times L \times h$



3.1.3 Le prisme droit

Définition 24. Un prisme droit est un polyèdre qui a deux faces, parallèles et superposables, appelées les bases, et dont les autres faces, appelées les faces latérales, sont des rectangles.

Définition 25. La distance entre les deux bases est appelée la hauteur du prisme.

Remarque. On parle ainsi de prisme droit à base triangulaire, de prisme droit à base hexagonale, etc., suivant la nature des bases.

Le pavé droit (et donc le cube) sont des cas particuliers de prismes droits.

Définition 26. On appelle l'aire latérale d'un prisme l'aire de l'ensemble des faces latérales.

Remarque. On calcule donc l'aire latérale d'un prisme par la somme d'aires de rectangles.

Propriété 30. L'aire d'un prisme droit est égale à la somme de l'aire latérale et du double de l'aire d'une base.

Propriété 31. Le volume d'un prisme droit est égale au produit de l'aire d'une de ses bases par la hauteur du prisme.

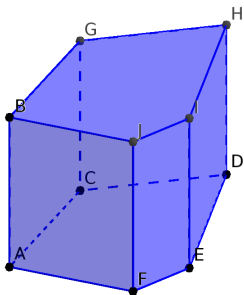


FIGURE 3.1 – prisme droit à base pentagonale

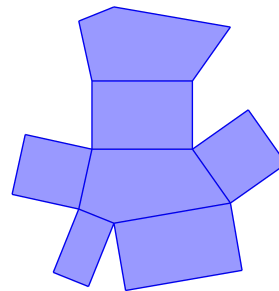


FIGURE 3.2 – patron d'un prisme droit à base pentagonale

3.1.4 Le cylindre de révolution

Définition 27. Le cylindre de révolution est obtenu par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés.

Remarque. « Révolution » vient du latin « revolvere » formé à partir de la racine « volv- » signifiant « rouler ».

Le cylindre de révolution possède deux faces, identiques et parallèles, qui sont des disques (et une face courbe). La droite joignant les centres de chaque base est perpendiculaire aux bases.

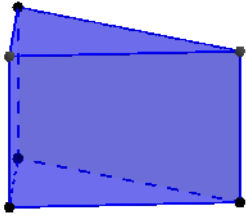


FIGURE 3.3 – prisme droit à base triangulaire

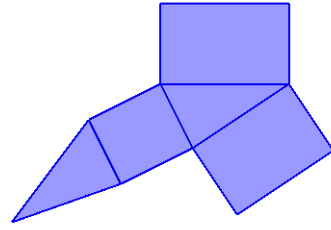
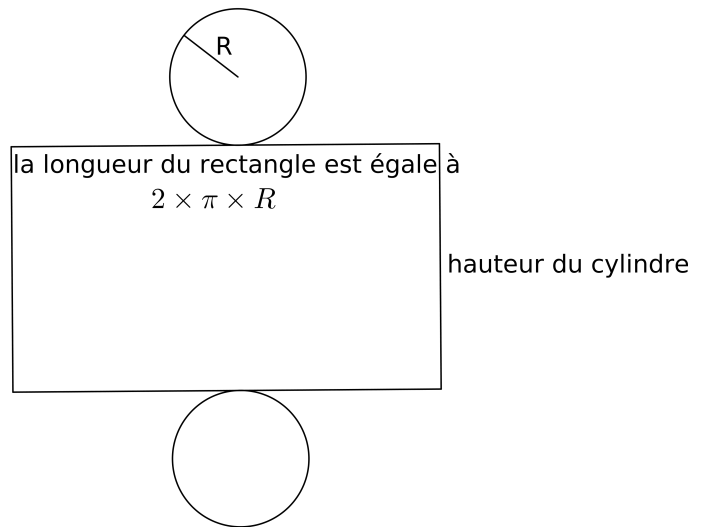
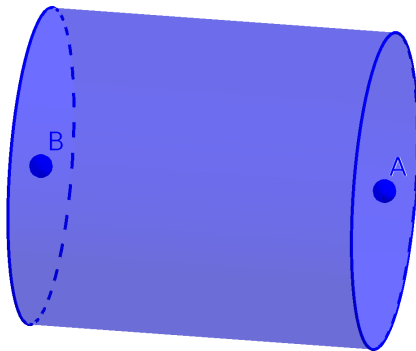


FIGURE 3.4 – patron d'un prisme droit à base triangulaire

R : rayon du cylindre



Définition 28. La distance entre les deux bases est appelée la hauteur du cylindre.

Propriété 32. L'aire latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à : $A_{lat} = 2\pi Rh$

Propriété 33. L'aire totale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à : $A_{tot} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

Propriété 34. Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à : $V = \pi R^2 h$

3.1.5 La pyramide

Définition 29. Une pyramide de sommet S est un polyèdre délimité par un polygone ne contenant pas S , appelé la base, et des triangles de sommet S ayant un côté en commun avec la base, appelés faces latérales.

Définition 30. La hauteur d'une pyramide de sommet S est le segment $[SH]$, perpendiculaire au plan de la base, où H est un point de ce plan. On appelle aussi hauteur la longueur SH .

Définition 31. Une pyramide est dite régulière lorsque sa base est un polygone régulier et que sa hauteur passe par le centre de la base.

Définition 32. Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Remarque. Un tétraèdre régulier est donc une pyramide dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux superposables.

Propriété 35. Le volume d'une pyramide de hauteur h est égal à : $V = \frac{A_{base} \times h}{3}$

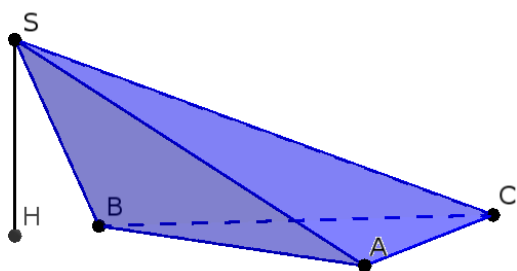


FIGURE 3.5 – pyramide à base triangulaire

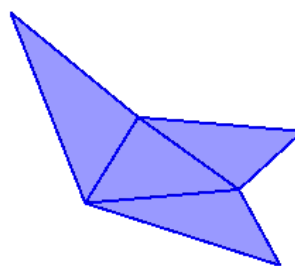


FIGURE 3.6 – patron d'une pyramide à base triangulaire

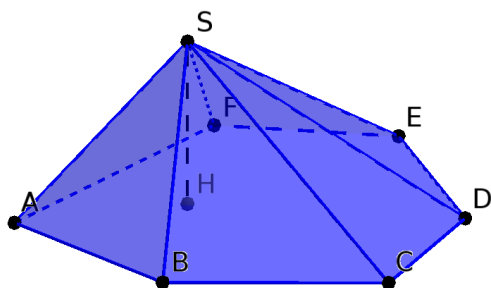


FIGURE 3.7 – pyramide à base hexagonale

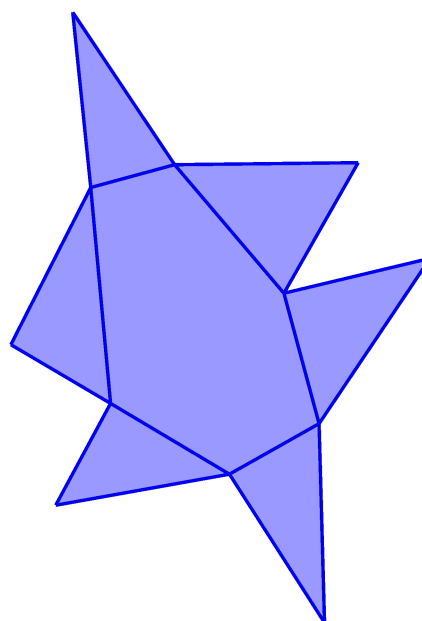


FIGURE 3.8 – patron d'une pyramide à base hexagonale

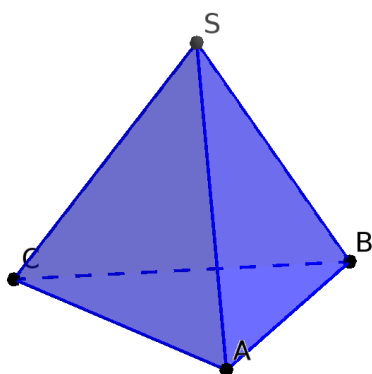


FIGURE 3.9 – tétraèdre régulier

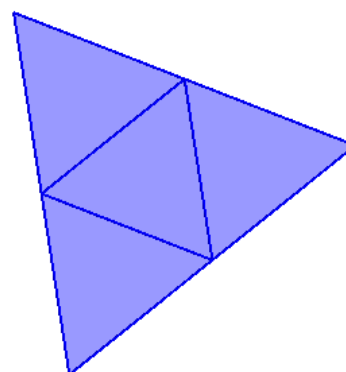


FIGURE 3.10 – patron d'un tétraèdre régulier

3.1.6 Le cône de révolution

Définition 33. Un cône de révolution de sommet S est le solide engendré par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O autour de l'axe (SO) . Le disque de centre O et de rayon $[OM]$ est la

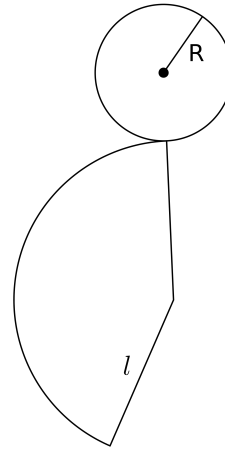
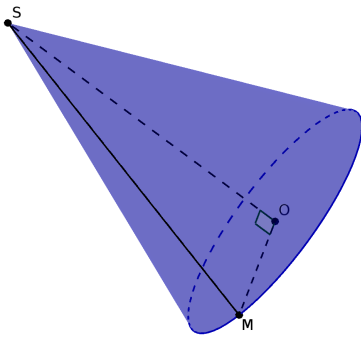
base de ce cône. Le segment $[SO]$ est la hauteur de ce cône (la longueur SO également). Le segment $[SM]$ est une génératrice de ce cône.

Remarque. Un cône de révolution possède une face qui est un disque et une face courbe.

Propriété 36. L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon R et de génératrice l est égale à : $A_{lat} = \pi Rl$

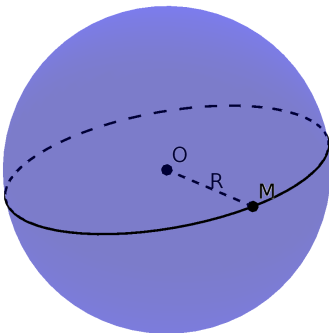
Propriété 37. L'aire totale d'un cône de révolution de rayon R et de génératrice l est égale à : $A_{tot} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(R + l)$

Propriété 38. Le volume d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h est égale à : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$



3.1.7 La sphère

Définition 34. Une sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$.



Définition 35. Un grand cercle d'une sphère de centre O et de rayon R est un cercle de centre O et de rayon R .

Définition 36. Une boule est l'intérieur d'une sphère.

Propriété 39. L'aire d'une sphère de rayon R est égale à : $A = 4\pi R^2$

Propriété 40. Le volume d'une boule de rayon R est égal à : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

3.2 Sections par un plan

3.2.1 Section d'un prisme droit par un plan parallèle à la base

Propriété 41. *La section d'un prisme droit par un plan parallèle à la base est un polygone identique à la base.*

Remarque. La section d'un cube par un plan parallèle à une de ses faces est donc un carré, identique à une face. La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est donc un rectangle, identique à la face.

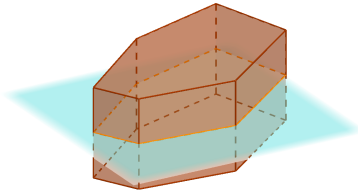


FIGURE 3.11 – Section d'un prisme droit par un plan parallèle à la base

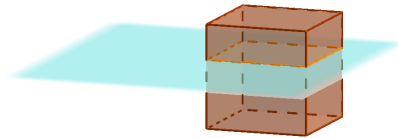


FIGURE 3.12 – Section d'un cube par un plan parallèle à la base

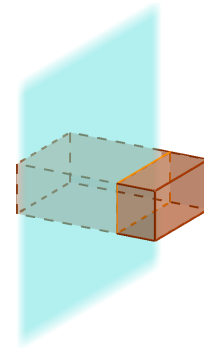


FIGURE 3.13 – Section d'un pavé droit par un plan parallèle à la base

3.2.2 Section d'un prisme droit par un plan parallèle à une arête

Propriété 42. *La section d'un prisme droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.*

Remarque. La section d'un cube par un plan parallèle à une arête est un rectangle. La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

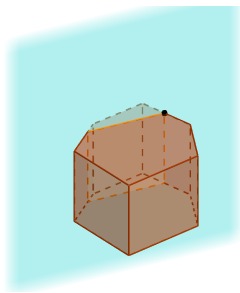


FIGURE 3.14 – Section d'un prisme droit par un plan parallèle à une arête

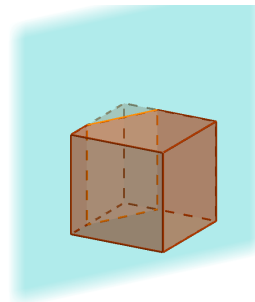


FIGURE 3.15 – Section d'un cube par un plan parallèle à une arête

3.2.3 Sections d'un cylindre par un plan parallèle ou perpendiculaire à sa base

Propriété 43. *La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base est un cercle, identique à la base.*

Propriété 44. *La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à sa base est un rectangle.*

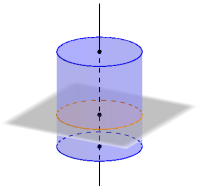


FIGURE 3.16 – Section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base

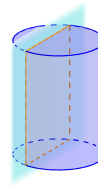


FIGURE 3.17 – Section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à la base

3.2.4 Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base

Propriété 45. *La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone, réduction de la base.*

Propriété 46. *La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un cercle, réduction de la base.*

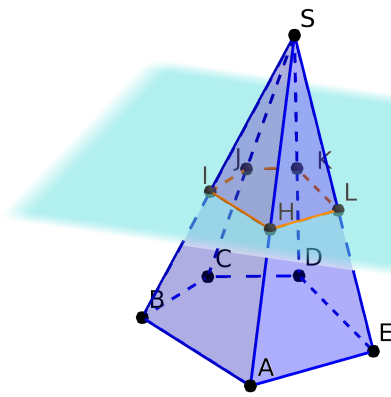


FIGURE 3.18 – Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base

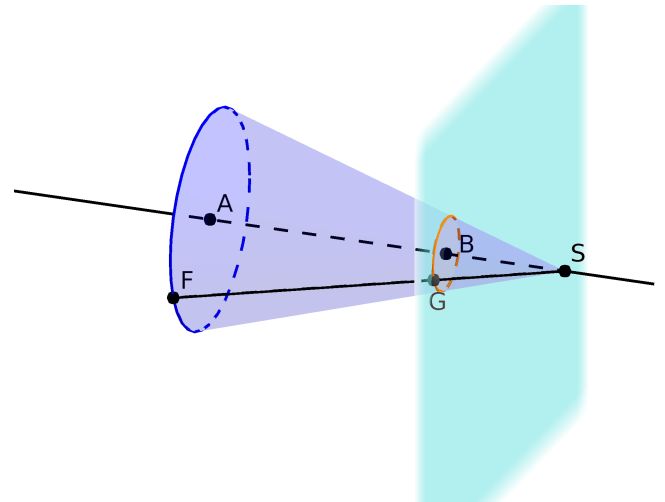


FIGURE 3.19 – Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base

Propriété 47. *Les longueurs des côtés du polygone de réduction (resp. du rayon du cercle de section) sont proportionnelles aux longueurs des côtés du polygone de base (resp. du rayon du cercle de base).*

Définition 37. On appelle coefficient de réduction, noté k , le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les longueurs de la réduction à partir des longueurs de la base.

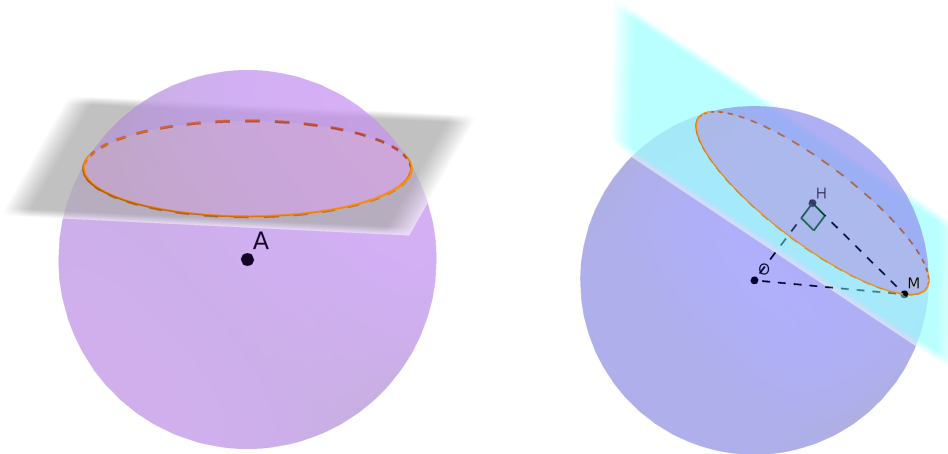
Remarque. Dans la figure 18, on a donc $k = \frac{SH}{SA} = \frac{SI}{SB} = \frac{KL}{DE} = \dots$

Dans la figure 19, on a donc $k = \frac{SB}{SA} = \frac{SG}{SF} = \frac{BG}{AF} = \dots$

Propriété 48. *Dans une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 , et les volumes sont multipliés par k^3 .*

3.2.5 Section d'une sphère par un plan

Propriété 49. *La section d'une sphère par un plan est un cercle.*

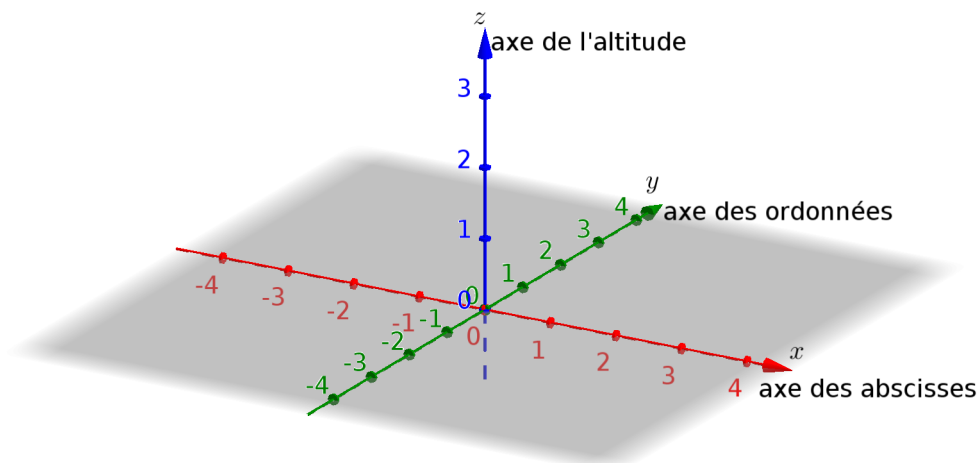


Propriété 50. *On considère une sphère de centre O et de rayon R . La section de cette sphère par un plan est un cercle de centre H et de rayon r . On a la relation suivante : $OH = \sqrt{R^2 - r^2}$*

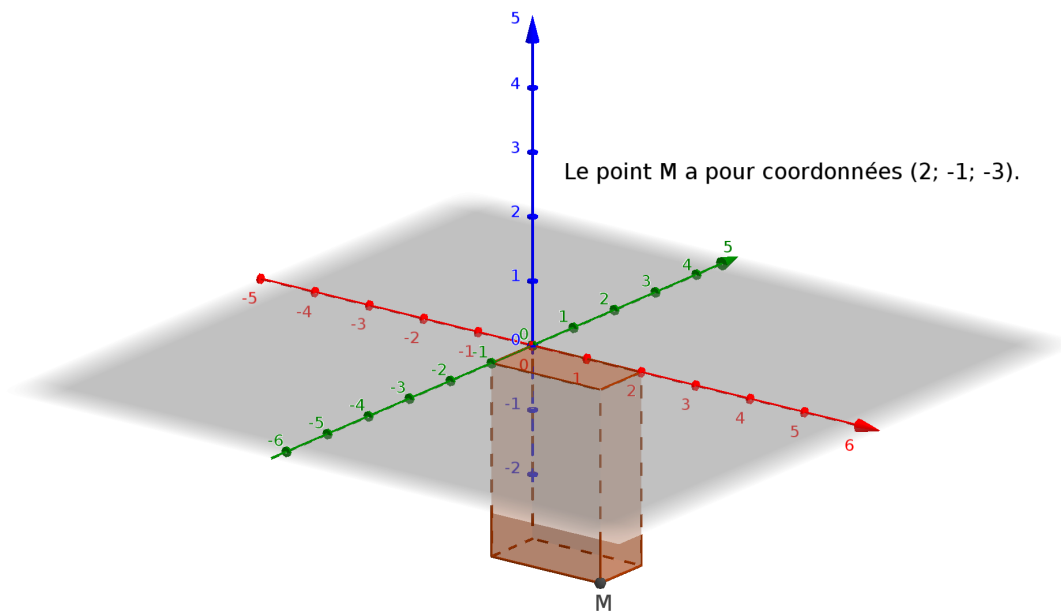
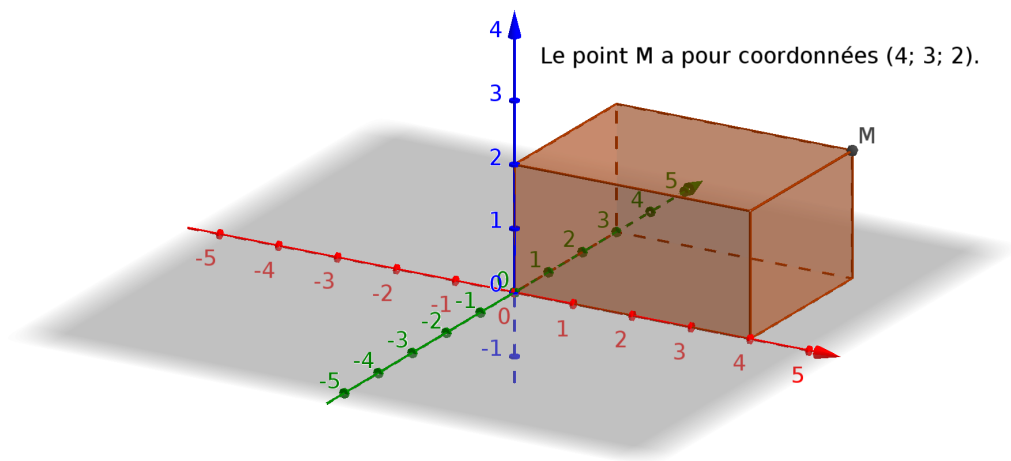
3.3 Repérage

3.3.1 Sur le pavé droit : abscisse, ordonnée, altitude

Pour repérer un point dans un plan, on utilise un repère, composé de deux axes : l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Chaque point est alors repéré par un couple de nombres : ses coordonnées. On peut procéder de manière analogue pour repérer un point dans l'espace. On a cette fois besoin d'un repère composé de trois axes, et chaque point est repéré par un triplet de nombres. Le premier est l'abscisse, le deuxième l'ordonnée, et on appelle le troisième nombre l'altitude ou la cote.



Un parallélépipède rectangle peut nous aider à visualiser les coordonnées d'un point.



3.3.2 Sur la sphère : latitude et longitude

Définition 38. On considère une sphère de centre O et de rayon R et une droite passant par O . Cette droite coupe la sphère en deux points A et B . On considère ensuite un plan P perpendiculaire à la droite (AB) situé à une distance inférieure à R du point O . La section de la sphère par le plan P définit un cercle que l'on appelle un parallèle. La latitude est la mesure, en degrés, de l'angle de sommet O qui sépare le parallèle considéré du parallèle origine.

Remarque. Tous les points de la sphère situés sur un même parallèle ont la même latitude.

Définition 39. On considère une sphère de centre O et une droite passant par O . Cette droite coupe la sphère en deux points A et B . Un demi-grand cercle passant par A et B est appelé un méridien de la sphère. La longitude est la mesure, en degrés, de l'angle qui sépare le méridien considéré du méridien origine.

Remarque. Tous les points de la sphère sur un même méridien ont la même longitude.

Remarque. Parallèles et méridiens se coupent à angles droits.

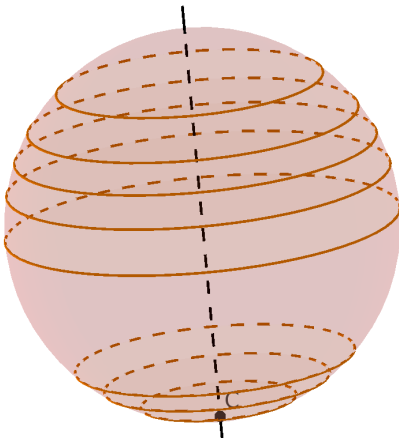


FIGURE 3.20 – Sphère avec quelques parallèles

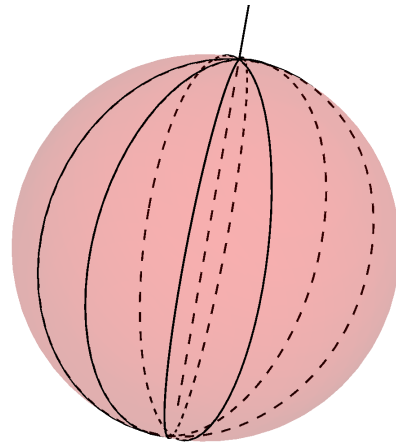
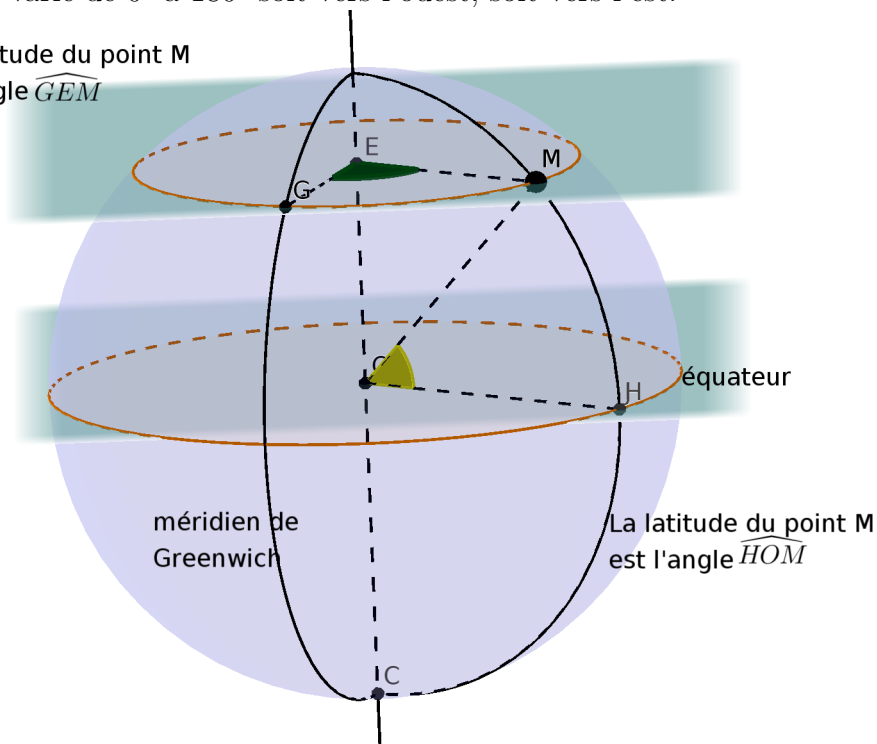


FIGURE 3.21 – Sphère avec quelques méridiens

Cas particulier de la sphère terrestre Les deux points A et B des définitions précédentes sont les pôles Nord et Sud. Le parallèle d'origine, où les points ont par définition une latitude égale à zéro, est l'équateur. Le méridien d'origine, où les points ont par définition une longitude égale à zéro, est le méridien de Greenwich. Chaque point de la terre peut donc être repéré par ses coordonnées géographiques (latitude ; longitude). La latitude varie de 0° à 90° soit vers le nord, soit vers le sud. La longitude varie de 0° à 180° soit vers l'ouest, soit vers l'est.

La longitude du point M
est l'angle $\widehat{GEM}$



La latitude du point M
est l'angle $\widehat{HOM}$