

Chapitre 5

Calcul littéral

5.1 Vocabulaire

Définition 43. Une somme est le résultat d'une addition. Un produit est le résultat d'une multiplication.

Les termes sont les éléments d'une somme. Les facteurs sont les éléments d'un produit.

Remarque. Une différence est le résultat d'une soustraction. Mais une différence peut s'écrire sous la forme d'une somme algébrique. Par exemple : $8 - 2x = 8 + (-2x)$ donc $8 - 2x$ est bien également une somme.

Exemple 47. $A = 10x$ est un produit. $B = 5 + 4(2x + 3)$ est une somme.
 $C = 2(x + y)$ est un produit. $D = ab + cd$ est une somme.
 $E = 4x^2 + 16x + 16$ est une somme. $F = 5y + 1$ est une somme.
 $G = (x - 1)^2 - 4$ est une somme. $H = (x - 3)(x + 12)$ est un produit.

Définition 44. Réduire une expression algébrique, c'est l'écrire avec le moins de termes possible.

Remarque. Quand une expression est réduite au maximum, il n'y a plus de signe $\times$ (les produits ont été effectués), mais il peut rester des signes $+$ ou $-$.

Exemple 48. Réduire les expressions suivantes au maximum :

$$I = 3m^2 + 3 \times 2F + 2 \times 4 + 7 \times m^2 + 1 + 13F$$

$$J = 7x \times x - 11y + 5 - 3 \times x^2 - 2 \times 8 - 4y$$

$$K = (2x^3)^2 - 15x + 7x \times x^2 + x^6 - 9x^3 + 5$$

$$L = (-3x)^2 - 7 + 5x - 9x + 1$$

$$M = -(3x)^2 - 4x + 3x - 8 + 4$$

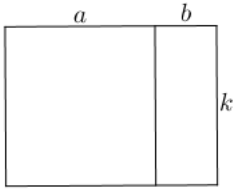
5.2 Développer un produit

Définition 45. Développer, c'est transformer un produit en somme.

5.2.1 Distributivité simple

Propriété 51. Pour tous nombres k , a et b , on a : $k(a + b) = ka + kb$

Démonstration :



Exemple 49. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$N = 4(a + 2b)$$

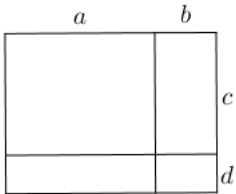
$$M = -2x(3x - 2y)$$

$$P = -5(2x + 3) - 8(3 - 2x)$$

5.2.2 Distributivité double

Propriété 52. Pour tous nombres a , b , c et d , on a : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Démonstration :



Exemple 50. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$Q = (2x + 5)(7x - 4)$$

$$R = (11 - 9x)(2x - 7)$$

$$S = (3x + 1)(2x - 5) - (2x - 3)(x + 8)$$

5.2.3 Carré d'une somme

Propriété 53. Pour tous nombres a et b , on a : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration :

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Remarque. C'est la première identité remarquable.
Le terme $2ab$ est appelé le « double produit ».

Exemple 51. $T = (x + 5)^2$

$$U = (2x + 7)^2$$

$$V = (13x + 4)^2$$

5.2.4 Carré d'une différence

Propriété 54. Pour tous nombres a et b , on a : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration :

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Remarque. C'est la deuxième identité remarquable.

Exemple 52. $W = (x - 9)^2$

$$X = (6x - 5)^2$$

$$Y = (11x - 8)^2$$

5.2.5 Produit d'une somme par une différence

Propriété 55. Pour tous nombres a et b , on a : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Démonstration :

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Remarque. C'est la troisième identité remarquable.

Exemple 53. $Z = (x + 12)(x - 12)$

$$A_1 = (2x - 7)(2x + 7)$$

$$B_1 = (5x + 11)(5x - 11)$$

5.2.6 Applications au calcul mental

Exemple 54. 102^2

$$99^2$$

$$102 \times 98$$

5.3 Factoriser une somme

Définition 46. Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Pour factoriser une expression, on cherche d'abord s'il y a un facteur commun, puis on essaye d'utiliser une égalité remarquable.

5.3.1 Avec un facteur commun

On utilise la formule de distributivité $ka + kb = k(a + b)$

On dit qu'« on met k en facteur ». k peut être un nombre, une lettre ou une expression plus complexe.

Exemple 55. $2a + 2b$

$$9a + 3$$

$$5 + 15x$$

$$3a^2 - 5a$$

$$2x(2x - 3) + (2x - 3)(x - 5)$$

$$(x - 1)(2x - 5) - (x - 1)^2$$

5.3.2 Avec une identité remarquable

On utilise les trois identités remarquables dans le sens de la factorisation :

$$\begin{aligned}
 a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\
 a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \\
 a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b)
 \end{aligned}$$

Exemple 56. $x^2 + 6x + 9$

$$25x^2 - 40x + 16$$

$$x^2 - 4$$

$$49x^2 + 4 - 28x$$

$$64 - 9x^2$$

$$9 + 30x + 25x^2$$

$$9x^2 - (2x + 3)^2$$

5.3.3 Quand le facteur commun est dissimulé

Exemple 57.

$$C_1 = (x - 2)(x - 4) - (x^2 - 4)$$

$$C_1 = (x - 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 2)$$

$$C_1 = (x - 2)[(x - 4) - (x + 2)]$$

$$C_1 = (x - 2)(x - 4 - x - 2)$$

$$C_1 = (x - 2)(-6)$$

$$C_1 = -6(x - 2)$$

$$D_1 = 49x^2 - 56x + 16 + 2(7x - 4)$$

$$D_1 = (7x - 4)^2 + 2(7x - 4)$$

$$D_1 = (7x - 4)[(7x - 4) + 2]$$

$$D_1 = (7x - 4)(7x - 2)$$