Chapitre 9

Fonctions, lien avec la proportionnalité

9.1 Définitions et rappels

9.1.1 Fonction linéaire

Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Par exemple, le tableau

3	5	-1	8
21	35	-7	56

est un tableau de proportionnalité, dont le coefficient de proportionnalité vaut 7.
On peut ainsi dire que les nombres de la deuxième ligne sont les images des nombres de la première ligne par la fonction qui, à x, associe $7x$.
C'est donc un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 7x$.

De manière générale, une fonction linéaire a une expression algébrique de la forme $x \mapsto ax$, avec a un nombre quelconque.

9.1.2 Fonction affine

Une fonction affine traduit une situation où les accroissements sont proportionnels. Par exemple, étudions le tableau de valeurs suivants :

	A	B	C	D	E	F
x	0	2	3	-1	5	-2
y	3	11	15	-1	23	-5

Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité. Mais si on regarde le tableau des accroissements :

Ce tableau-là est un tableau de proportionnalité.

Dans ce cas, on dit que les accroissements sont proportionnels, et le tableau est un tableau de valeurs d'une fonction dite affine, de la forme $x \mapsto ax + b$, avec a et b deux nombres quelconques.

Remarque : a est alors le coefficient de proportionnalité du tableau des accroissements et b est l'image de zéro.

Le tableau initial est donc un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 4x + 3$.

9.1.3 Calcul d'image

Exemple 92. On considère la fonction linéaire $f : x \mapsto 4x$.
Déterminer les images de -2 et de 6 par la fonction f.
$f(-2) = 4 \times (-2) = -8$
$f(6) = 4 \times 6 = 24$
-2 et 6 ont pour images respectivement -8 et 24 par la fonction f.

Exemple 93. Soit la fonction $g : x \mapsto -2x + 9$.

Déterminer les images de -3, $\dfrac{1}{3}$ et 5 par la fonction g.
$g(-3) = -2 \times (-3) + 9 = 6 + 9 = 15$
$g\left(\dfrac{1}{3}\right) = -2 \times \dfrac{1}{3} + 9 = \dfrac{-2}{3} + \dfrac{27}{3} = \dfrac{25}{3}$
$g(5) = -2 \times 5 + 9 = -10 + 9 = -1$
-3, $\dfrac{1}{3}$ et 5 ont pour images respectivement 15, $\dfrac{25}{3}$ et -1 par la fonction g.

9.1.4 Calcul d'antécédent

Exemple 94. Soit la fonction linéaire $h : x \mapsto -12x$.
Déterminer les antécédents de 20 et de -48 par h.

- On cherche x tel que $h(x) = 20$ soit $-12x = 20$ ce qui donne $x = \dfrac{20}{-12} = -\dfrac{5}{3}$.
- On cherche x tel que $h(x) = -48$ soit $-12x = -48$ ce qui donne $x = -48 : (-12) = 4$.

Les antécédents de 20 et de -48 par la fonction h sont respectivement $-\dfrac{5}{3}$ et 4.

Exemple 95. Soit la fonction affine $i : x \mapsto 12x + 1$.
Déterminer les antécédents de 25 et de -35 par la fonction i.

• $i(x) = 25$	• $i(x) = -35$
$12x + 1 = 25$	$12x + 1 = -35$
$12x = 24$	$12x = -36$
$x = 2$	$x = -3$

Les antécédents de 25 et de -35 par la fonction i sont respectivement 2 et -3.

9.2 Représentation graphique

9.2.1 Fonction linéaire

Une fonction linéaire est la traduction d'une situation de proportionnalité donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

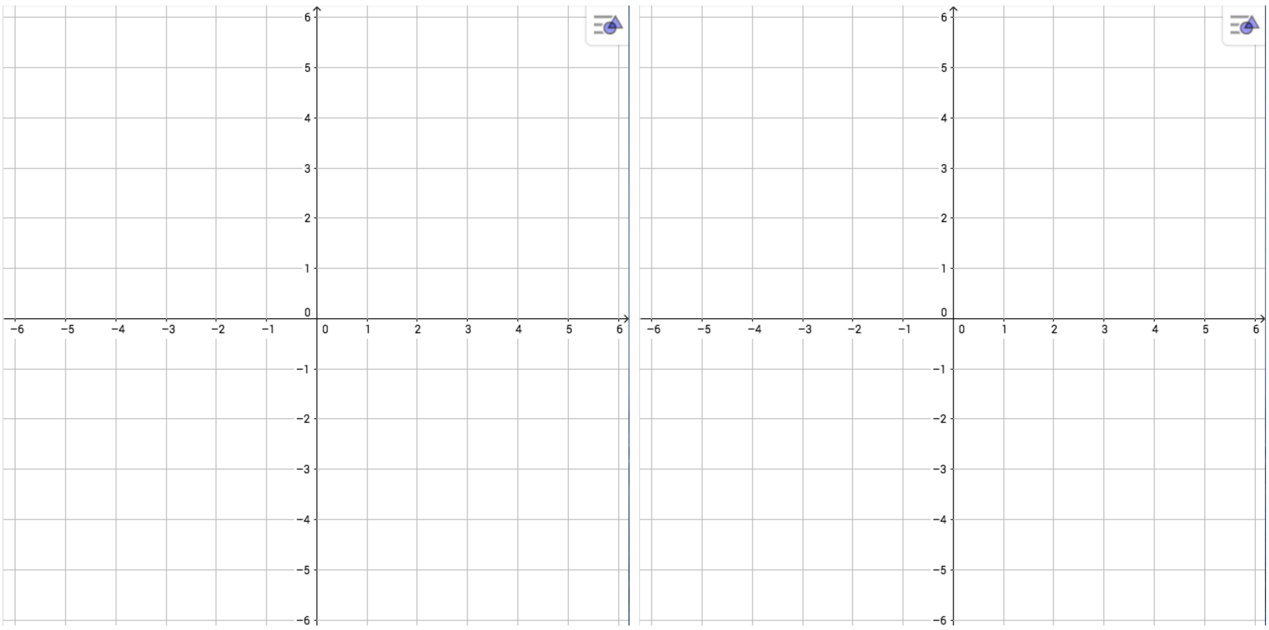
On connaît donc déjà un point appartenant à cette droite, c'est le point O $(0\,;\,0)$.
Il nous faut donc trouver un deuxième point appartenant à la représentation graphique de la fonction.
Considérons la fonction $f : x \mapsto ax$.
On a : $f(x) = ax$ et $f(x+1) = a(x+1) = ax + a = f(x) + a$
Ainsi si on augmente x (l'abscisse) de 1, alors $f(x)$ (l'ordonnée) augmente de a.

Pour trouver un deuxième point appartenant à la représentation graphique de la fonction, on peut donc partir du point O, augmenter l'abscisse de 1 et l'ordonnée de a. Le point A de coordonnées $(1\,;\,a)$ appartient donc aussi à la représentation graphique de f.

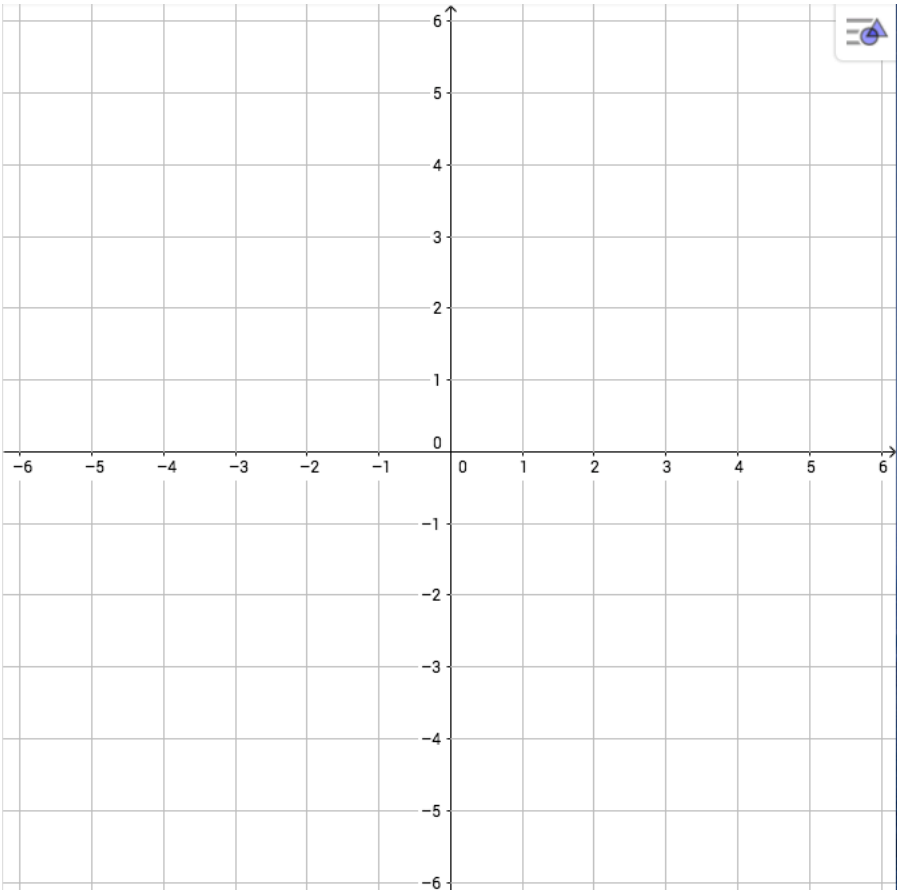
Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la fonction.

Exemple 96. Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto -2x$.

Exemple 97. Représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto 5x$.



Exemple 98. Représenter graphiquement la fonction $h : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x$.



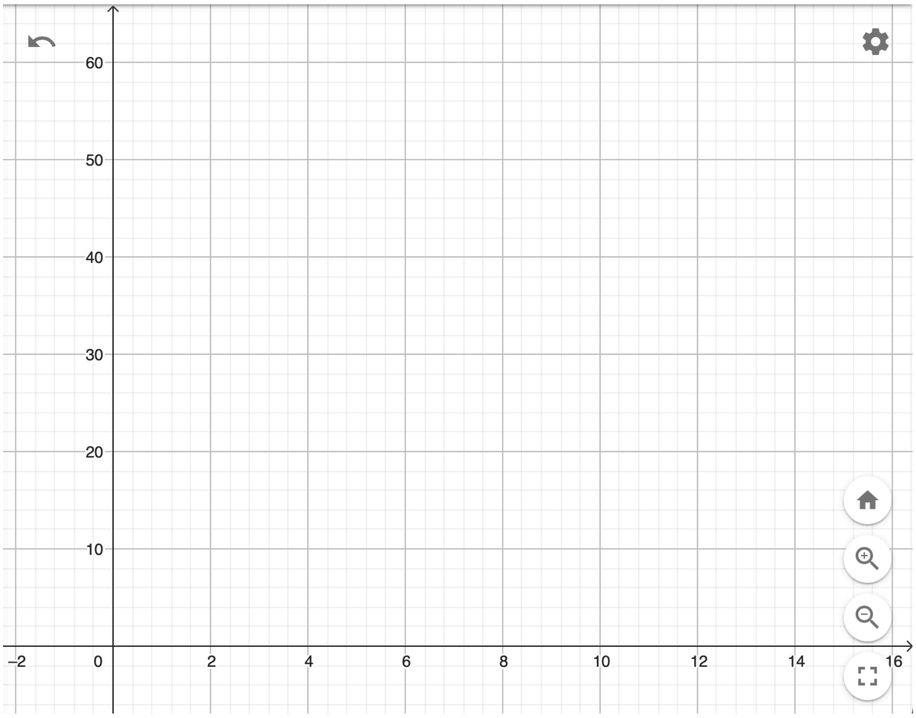
9.2.2 Fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Pour la tracer, il faut donc trouver deux points appartenant à cette droite.

Première méthode : on calcule les coordonnées de deux points appartenant à cette droite
On choisit deux valeurs de x (abscisses) et on calcule les valeurs de y (ordonnées) correspondantes en utilisant $y = f(x)$.

Exemple 99. Représenter graphiquement la fonction $i : x \mapsto 2,5x + 16$.
On choisit deux valeurs de x et on calcule les ordonnées y correspondantes avec $y = i(x) = 2,5x + 16$.

x		
y		



Remarque. Chaque élève peut choisir des valeurs de x différentes, et donc avoir des points A et B différents, mais chaque élève obtiendra la même droite au final.

Deuxième méthode : sans calcul
L'expression générale d'une fonction affine est du type $f(x) = ax + b$.

• $f(0) = a \times 0 + b = b$, donc b est l'image de 0 par la fonction f. Cela signifie que le point $A(0; b)$ appartient à la représentation graphique de f.

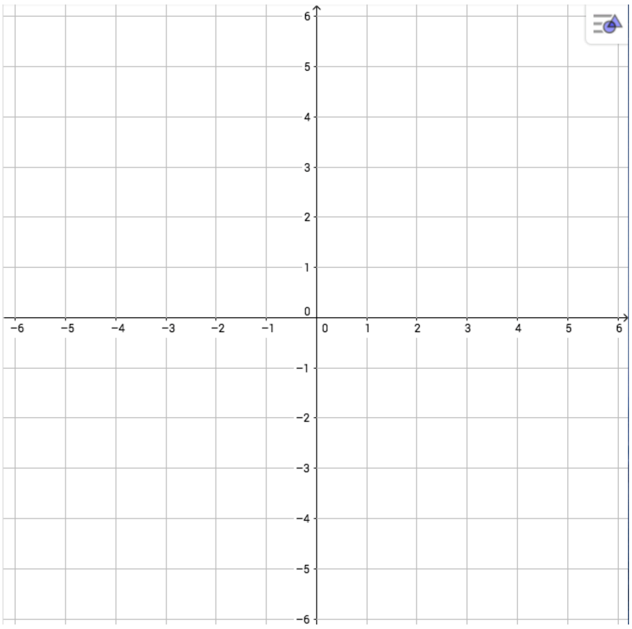
On dit que b est « l'ordonnée à l'origine » de la fonction f.

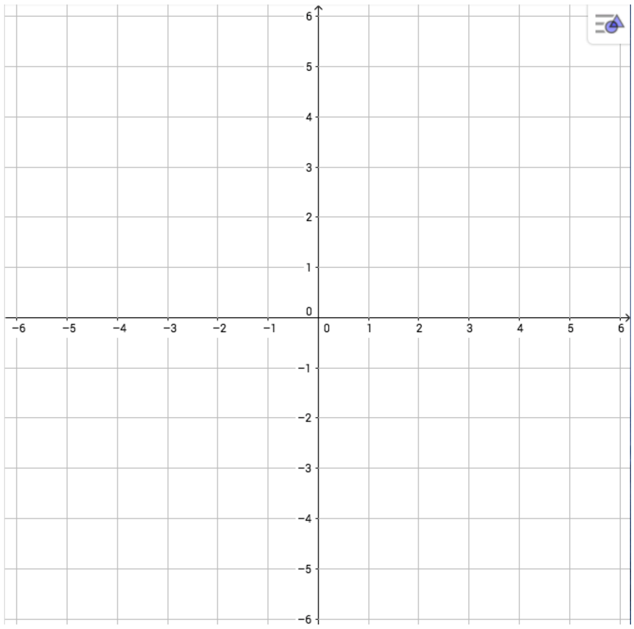
• $f(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b = ax + b + a = f(x) + a$, donc quand on augmente x de 1, $f(x)$ augmente de a. A partir du point A obtenu précédemment on augmente l'abscisse de 1 et l'ordonnée de a pour obtenir un deuxième point appartenant à la représentation graphique de f.

On dit a est « le coefficient directeur » de la fonction f. Il donne une indication sur la pente (direction) de la droite.

Exemple 100. Représenter graphiquement la fonction $j : x \mapsto -3x + 2$

Exemple 101. Représenter graphiquement la fonction $k : x \mapsto 2x + \dfrac{1}{2}$



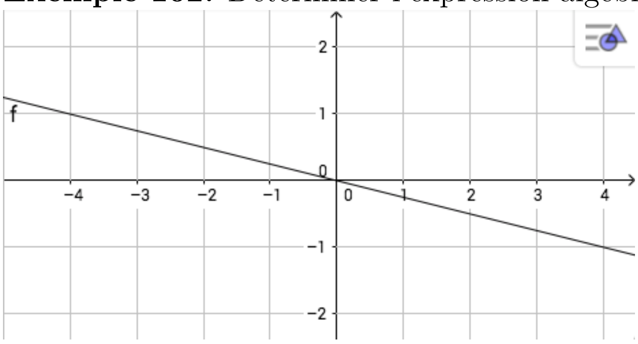


9.3 Détermination d'une expression algébrique

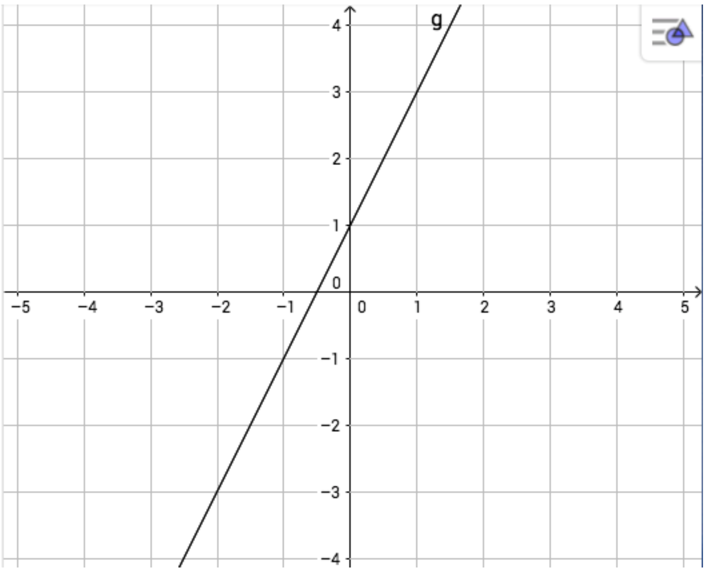
9.3.1 Graphiquement

On cherche les valeurs de a et de b telles que $f(x) = ax + b$. On reprend la méthode précédente « à l'envers ». b est l'ordonnée à l'origine, donc on lit l'ordonnée du point d'abscisse zéro appartenant à la droite. a est le coefficient directeur, donc on part d'un point de la droite, on augmente l'abscisse de 1 et on lit de combien a augmenté ou diminué l'ordonnée pour revenir sur la droite.

Exemple 102. Déterminer l'expression algébrique de la fonction f représentée ci-dessous.



Exemple 103. Déterminer l'expression algébrique de la fonction g représentée ci-dessous.



9.3.2 A l'aide deux nombres et de leurs images

On suppose que la représentation graphique d'une fonction affine f passe par les points $M(x_M; y_M)$ et $N(x_N; y_N)$.
On cherche l'expression algébrique de la fonction f.
f étant affine, on a : $f(x) = ax + b$. On cherche a et b.

M et N appartiennent à la représentation graphique de f donc $y_M = f(x_M) = ax_M + b$ et $y_N = f(x_N) = ax_N + b$

Donc $y_M - y_N = a(x_M - x_N)$ donc $a = \dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$

On trouve ensuite b en utilisant le fait que M (ou N) appartient à la représentation graphique de f et on résout une équation.

Exemple 104. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points $A(-1; 5)$ et $B(3; 11)$.
Énoncé équivalent : Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que $f(-1) = 5$ et $f(3) = 11$.

f est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$.
$a = \dfrac{11 - 5}{3 - (-1)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$
$A \in \mathscr{C}_f$ donc $5 = f(-1) = \dfrac{3}{2} \times (-1) + b = \dfrac{-3}{2} + b$ donc $b = 5 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{2}$.
Ainsi, $f(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{2}$.

Exemple 105. Déterminer l'expression algébrique de la fonction linéaire g dont la représentation graphique passe par le point $C(5; -15)$.

g est une fonction linéaire donc $g(x) = ax$.
$a = -15 : 5 = -3$ donc $g(x) = -3x$.