

Chapitre 13

Racines carrées

Attention, ce chapitre ne fait pas partie du programme de troisième, c'est un chapitre « bonus ».

13.1 Définition

13.1.1 Rappels

On a déjà vu cette année la définition de la racine carrée d'un nombre. C'est à la page 16 de votre cours, partie 2.7. La voici :

Définition 74. Si a est un nombre positif, on appelle racine carrée de a , et on note $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré vaut a .

Remarque. Si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(-\sqrt{a})^2 = a$

Exemple 120. $\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{169} = 13$ $(\sqrt{7})^2 = 7$
 $(2 \times \sqrt{3})^2 = 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} = 4 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

13.1.2 Valeur exacte, valeur arrondie

Nombre a	Valeur exacte de $\sqrt{a}$	Valeur arrondie de $\sqrt{a}$ au centième
19		
100		
113		
64		
225		
3		
63		

13.2 Opérations avec les racines carrées

13.2.1 Propriétés

Propriété 79. Pour tous nombres a et b positifs, on a : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Si, de plus, b est non nul, alors : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Démonstration :

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab \text{ et } (\sqrt{ab})^2 = ab$$

$\sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$ sont donc deux nombres qui, mis au carré, sont égaux. Ils sont donc soit égaux, soit opposés. Comme ils sont tous deux positifs, ils sont donc égaux, CQFD.

La démonstration est analogue pour le quotient.

Propriété 80. Conséquence de la propriété précédente : Si a est un nombre positif, alors $\sqrt{a^2} = a$

Démonstration :

D'après la propriété 1., en prenant $b = a$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a}\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

Remarque. L'égalité $(\sqrt{a})^2 = a$ vient de la définition même de la racine carrée, alors que l'égalité $\sqrt{a^2} = a$ est une propriété (qui se démontre donc).

Exemple 121. $\sqrt{7^2} = 7$

$$\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{7}\sqrt{28} = \sqrt{7 \times 28} = \sqrt{7 \times 7 \times 4} = \sqrt{7^2} \sqrt{4} = 7 \times 2 = 14$$

$$\sqrt{75}\sqrt{32} = \sqrt{75 \times 32} = \sqrt{25 \times 3 \times 16 \times 2} = \sqrt{25} \sqrt{3 \times 2} \sqrt{16} = 5 \times 4 \times \sqrt{6} = 20\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{75}{100}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Remarque. Il n'y a surtout pas de propriété équivalente pour l'addition !

Démonstration :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b, \text{ donc ce n'est pas égal à } a + b.$$

Exemple 122. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

13.2.2 Simplification d'expressions

Dans tous les exercices avec des racines carrées, il faudra toujours donner le résultat sous la forme la plus simple possible. La plus simple possible, cela signifie que l'on veut le nombre le plus petit possible sous le radical (le radical est le nom que l'on donne au symbole de la racine carrée).

Par exemple, on ne garde pas $\sqrt{18}$ comme résultat final d'un calcul :

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Pour trouver l'expression la plus simple, il faut décomposer les nombres présents sous le radical en utilisant les carrés parfaits, en trouvant la plus grande carré parfait possible. Dans l'exemple précédent, on aurait pu décomposer 18 en 6 fois 3, mais cela n'aurait eu aucun intérêt car ni 6 ni 3 ne sont des carrés parfaits. L'intérêt d'avoir pris 9 fois 2, c'est que 9 est le carré de 3, donc à l'étape suivante, il reste un nombre plus petit sous le radical.

Exemple 123. Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible :

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{112} = \sqrt{7} - \sqrt{16 \times 7} = \sqrt{7} - \sqrt{16}\sqrt{7} = \sqrt{7} - 4\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$$

$$5\sqrt{20}\sqrt{45}\sqrt{5} = 5\sqrt{20 \times 45 \times 5} = 5\sqrt{4 \times 5 \times 5 \times 9 \times 5} = 5\sqrt{4 \times 5^2 \times 9} \sqrt{5} = 5 \times 2 \times 5 \times 3 \times \sqrt{5} = 150\sqrt{5}$$

$$\sqrt{44} - 3\sqrt{176} = \sqrt{4 \times 11} - 3\sqrt{16 \times 11} = \sqrt{4}\sqrt{11} - 3\sqrt{16}\sqrt{11} = 2 \times \sqrt{11} - 3 \times 4 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11} - 12\sqrt{11}$$

$$\text{donc } \sqrt{44} - 3\sqrt{176} = -10\sqrt{11}$$

13.3 Applications

13.3.1 Calculs avec les identités remarquables

Exemple 124. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (5 + \sqrt{2})^2 = 25 + 10\sqrt{2} + 2 = 27 + 10\sqrt{2}$$

$$B = (3 - \sqrt{5})^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$$

$$C = (2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7}) = 4 - 7 = -3$$

$$D = (5\sqrt{2} - 3)(3\sqrt{2} + 7) = 15 \times 2 + 35\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 21 = 9 + 26\sqrt{2}$$

13.3.2 Une jolie formule pour finir

Propriété 81. Dans un repère orthonormé (O, I, J) , si le point M a pour coordonnées $(x_M; y_M)$ et si le point N a pour coordonnées $(x_N; y_N)$, alors la distance MN est donné par le calcul suivant :

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

Démonstration :

Premier cas de figure : on suppose que $x_N > x_M$ et que $y_N > y_M$. On appelle I le point de coordonnées $(x_N; y_M)$. Le triangle INM est ainsi rectangle en I , avec $IM = x_N - x_M$ et $IN = y_N - y_M$. On applique le théorème de Pythagore :

$MN^2 = IM^2 + IN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2$. Or MN est une longueur, donc MN est positif, donc on a bien : $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

Exemple 125. Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on considère les points $A(4; 4)$, $B(3; -1)$ et $C(1; 2)$.

1. Faire une figure, en prenant 1 cm comme unité.
2. Calculer les distances AB , AC et BC .
3. En déduire la nature du triangle ABC .