Collège Léon Blum

Villepreux

Mathématiques
Classe de Troisième (cycle 4)

LM Le Maux
lise-marie.le-maux@ac-versailles.fr

septembre 2022

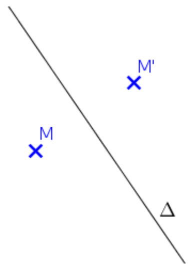
Chapitre 1

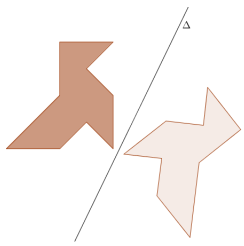
Transformation du plan, Thalès

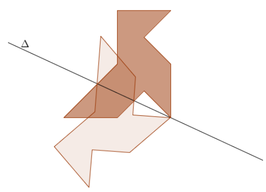
1.1 Les transformations du plan

1.1.1 Symétrie axiale

Définition 1. Soient une droite Δ et un point M n'appartenant pas à Δ.
Le symétrique du point M par rapport à la droite Δ est le point M' tel que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.





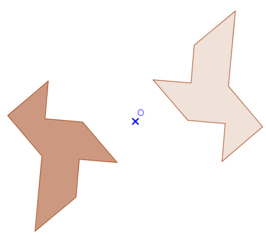


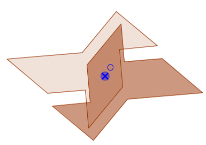
Remarque.

1. Lorsque le point M appartient à la droite Δ, son symétrique est le point M lui-même.
2. En sixième, on parle souvent de « pliage » ou de « miroir ».
3. On peut dire : « M' est le symétrique de M par rapport à Δ » ou « M' est l'image de M par la symétrie d'axe Δ ».

1.1.2 Symétrie centrale

Définition 2. Soient deux points O et M distincts.
Le symétrique du point M par rapport au point O est le point M' tel que O soit le milieu du segment $[MM']$.



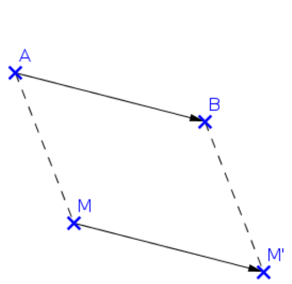


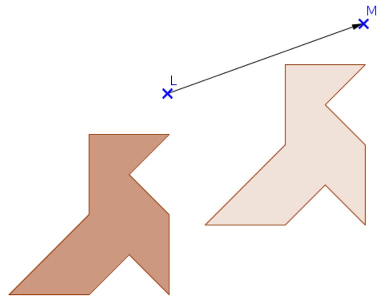
Remarque.

1. En cinquième, on dit souvent qu'on fait un « demi-tour autour du point O ».
2. On peut dire : « M' est le symétrique de M par rapport à O » ou « M' est l'image de M par la symétrie de centre O ».

1.1.3 Translation

Définition 3. Soient trois points distincts A, B et M.
L'image du point M par la translation qui transforme A en B est le point M' tel que le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme.





Remarque. Une translation est donc simplement un « glissement ». L'image n'est pas déformée, ni retournée.

1.1.4 Rotation

Définition 4. Le sens direct est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Le sens indirect est le sens des aiguilles d'une montre.

Définition 5. Soient deux points distincts M et O.
L'image du point M par la rotation de centre O et d'angle α dans le sens direct (resp. indirect) est le point M' tel que $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$ avec l'angle $\widehat{MOM'}$ qui « tourne » dans le sens direct (resp. indirect).

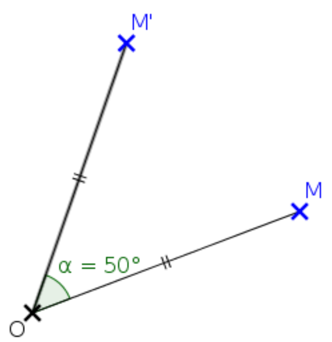


Figure 1.1 – M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle 50^o dans le sens direct

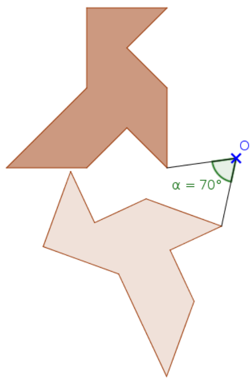


Figure 1.2 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par la rotation de centre O et d'angle 70^o dans le sens direct

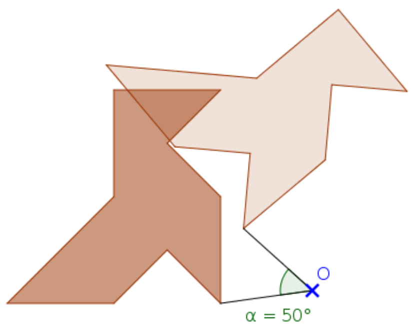


Figure 1.3 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par la rotation de centre O et d'angle 50^o dans le sens indirect

Remarque.

1. Une rotation d'angle α dans le sens direct est équivalente à une rotation d'angle $360^o - \alpha$ dans le sens indirect.
2. Une rotation d'angle 180^o dans le sens direct ou indirect est une symétrie centrale.

1.1.5 Propriétés des isométries du plan

Définition 6. Un isométrie du plan est une transformation qui conserve les longueurs.

Remarque. Si l'image d'un segment par une transformation du plan est un segment de même longueur, cette transformation est donc une isométrie.

Propriété 1. *Les symétries axiales et centrales, les translations et les rotations sont des isométries.*

Propriété 2. *Les images par une isométrie de deux droites parallèles sont parallèles.*
On dit que : « Une isométrie conserve le parallélisme. ».

Propriété 3. *L'image d'un angle par une isométrie est un angle de même mesure.*
On dit que : « Une isométrie conserve les angles. ».

1.1.6 Homothétie

Définition 7. Soient deux points distincts O et M et un nombre k.
L'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k est le point M' tel que :
- les points M, O et M' sont alignés
- si $k > 0$, M et M' sont du même côté de O et $OM' = kOM$
- si $k < 0$, O est entre M et M' et $OM' = -kOM$.

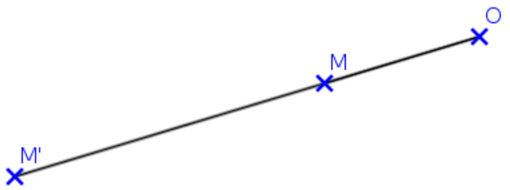


FIGURE 1.4 – M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3

FIGURE 1.5 – M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport -4

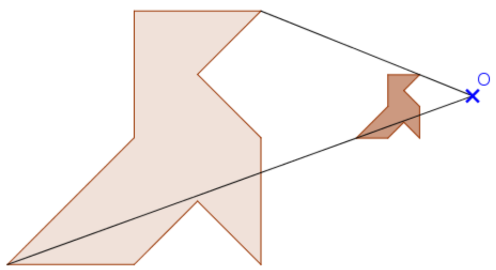


FIGURE 1.6 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par l'homothétie de centre O et de rapport 4

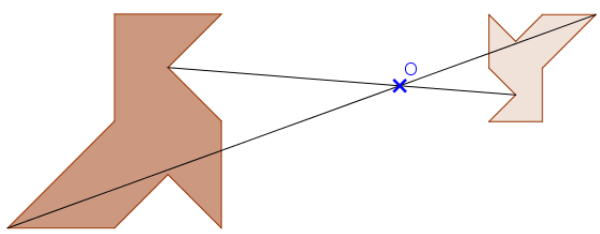


FIGURE 1.7 – La cocotte claire est l'image de la cocotte foncée par l'homothétie de centre O et de rapport $-0,5$

Remarque.

1. Si $k > 1$ ou si $k < -1$, l'image est un agrandissement de la figure initiale.

2. Si $-1 < k < 1$, l'image est une réduction de la figure initiale.
3. Si $k = -1$, l'homothétie est une symétrie centrale.
4. Si $k = 1$, l'homothétie ne modifie pas la figure initiale.
5. L'homothétie n'est pas une isométrie.

Propriété 4. *(admise) Une homothétie transforme une droite (d) en une droite (d') parallèle à (d).*

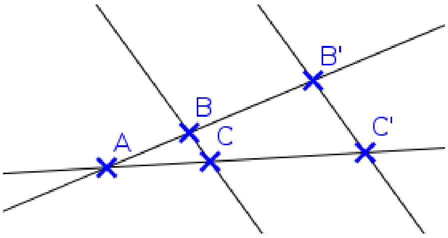


FIGURE 1.8 – B' et C' sont les images respectivement de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $2,5$

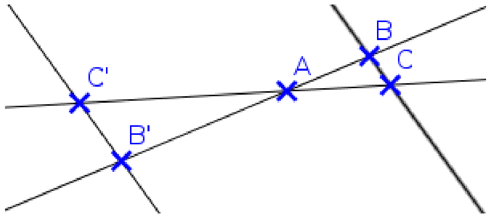
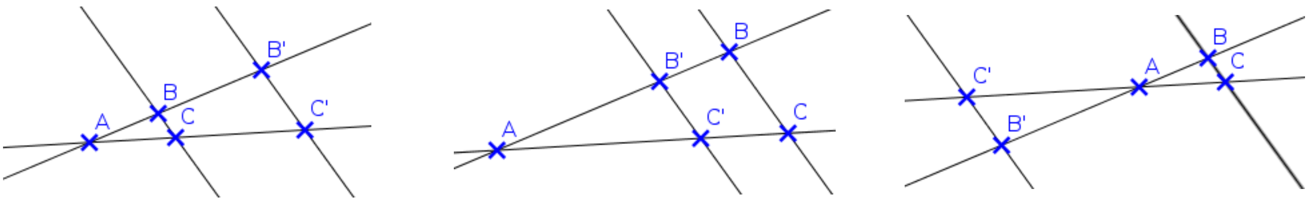


FIGURE 1.9 – B' et C' sont les images respectivement de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport -2

1.2 Théorème de Thalès et réciproque

1.2.1 Théorème de Thalès

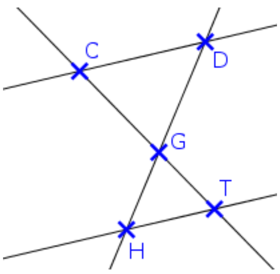
Remarque. Si deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles, elles définissent deux triangles. Le théorème de Thalès nous permet de dire que les longueurs des côtés de ces deux triangles sont proportionnelles.



Propriété 5. *(admise) Si les points A, B, et B' sont alignés ainsi que les points A, C et C', et si les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on a :*

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Exemple 1.



Sur la figure ci-contre, les droites (CD) et (HT) sont parallèles. On donne $DG = 25\ mm$; $GH = 45\ mm$; $HT = 27\ mm$. Calculer CD.

Les points C, G et T sont alignés ainsi que les points D, G et H et les droites (CD) et (HT) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{GC}{GT} = \dfrac{GD}{GH} = \dfrac{CD}{HT}$

$\dfrac{25}{45} = \dfrac{CD}{27}$ $\qquad CD = \dfrac{27 \times 25}{45}$ $\qquad$ donc $CD = 15\ mm$

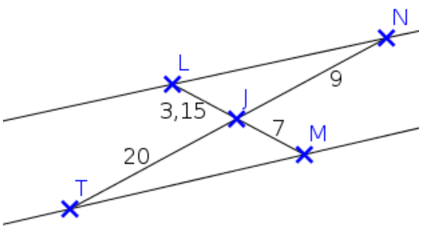
1.2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Remarque. La réciproque du théorème de Thalès permet de prouver que deux droites sont parallèles. Attention, il faut une condition dans l'ordre d'alignement des points pour pouvoir l'appliquer.

Propriété 6. *Si les points A, B, et M sont alignés dans le même ordre que les points A, C et N, et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.*

Remarque. Attention, quand on calcule séparément les quotients $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$, il faut garder les valeurs exactes (et ne jamais arrondir !).

Exemple 2.



Montrer que les droites (LN) et (TM) sont parallèles.

Les points L, J et M sont alignés dans le même ordre que les points N, J et T. De plus :

D'une part : $\dfrac{JL}{JM} = \dfrac{3,15}{7} = \dfrac{9}{20}$

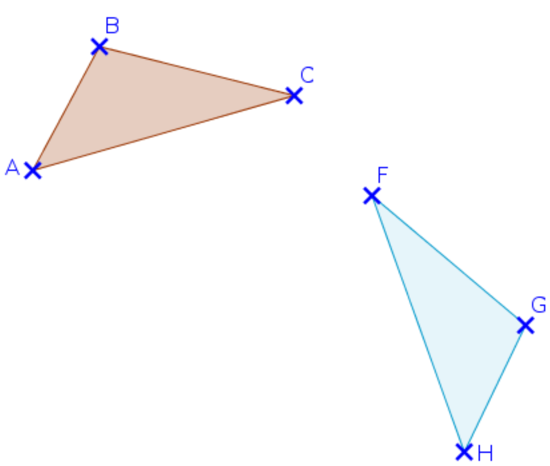
D'autre part : $\dfrac{JN}{JT} = \dfrac{9}{20}$

On remarque que $\dfrac{JL}{JM} = \dfrac{JN}{JT}$, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (LN) et (TM) sont parallèles.

1.3 Triangles semblables

1.3.1 Cas d'égalités des triangles

Définition 8. Deux triangles sont dits égaux (ou superposables) s'ils ont leurs côtés respectifs de même longueur.



Propriété 7. *Deux triangles superposables ont les mêmes mesures d'angles et la même aire.*

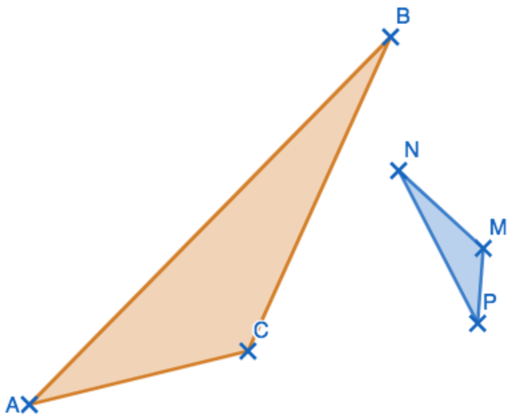
Propriété 8. *Une isométrie transforme un triangle en un triangle superposable au premier.*

Propriété 9. *Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectifs égaux, alors ils sont superposables.*

Propriété 10. *Si deux triangles ont un côté égal compris entre deux angles respectifs égaux, alors ils sont superposables.*

1.3.2 Triangles semblables

Définition 9. Deux triangles sont semblables si leurs angles respectifs sont égaux.



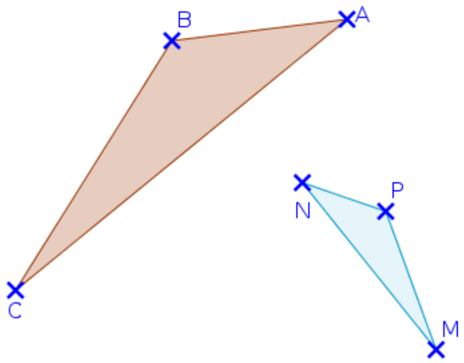
Remarque.
• Pour que deux triangles soient semblables, il suffit d'avoir l'égalité sur deux paires d'angles.
• Deux triangles superposables sont semblables.
• Dans une configuration de Thalès, on a deux triangles semblables.

Définition 10. Lorsque deux triangles sont semblables :
• un angle d'un triangle et l'angle de même mesure de l'autre triangle sont dits homologues ;
• les sommets (ou les côtés opposés) de deux angles homologues sont aussi dits homologues.

Propriété 11. *Une homothétie transforme un triangle en un triangle qui lui est semblable.*

Propriété 12. *Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés respectifs sont proportionnels.*

Propriété 13. *Si deux triangles ont leurs côtés respectifs proportionnels, alors ils sont semblables.*



Chapitre 2

Calcul numérique

2.1 Produit en croix

Propriété 14. *Soient a, b, c et d quatre nombres quelconques avec b et d non nuls. Si* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *alors* $ad = bc$

Démonstration :
Cette propriété fondamentale repose sur la commutativité de la multiplication (ie $ab = ba$ pour tous nombres a et b), la définition du quotient et sur un des principes de l'égalité : on ne change pas une égalité en multipliant de chaque côte par un même nombre.
Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est, par définition, le nombre qui, multiplié par b, est égal à a. Ainsi, $\dfrac{a}{b} \times b = a$ et de même $\dfrac{c}{d} \times d = c$.
On multiplie alors l'égalité $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ par bd de chaque côté : $\dfrac{a}{b} \times bd = \dfrac{c}{d} \times bd$ donc
$\left(\dfrac{a}{b} \times b\right) \times d = \left(\dfrac{c}{d} \times d\right) \times b$ donc $ad = cb$.

Exemple 3. En chimie, le professeur a versé 50 grammes de sel dans 0,8 litre d'eau. Combien de sel devra-t-il verser dans 0,7 litre d'eau pour obtenir une solution de même concentration ?

$50\ g \to 0,8\ L$

$x\ g \to 0,7\ L$

$$x = \frac{50 \times 0,7}{0,8} = 43,75$$

Il devra verser 43,75 g de sel dans 0,7 litre d'eau pour obtenir la même concentration.

Exemple 4. Pour la réalisation d'une boisson, il faut 2,2 L de jus d'orange pour 8 personnes. Fanny utilise 3,85 L de jus d'orange. Pour combien de personnes prépare-t-elle ce cocktail ?

$2,2\ L \to 8$ personnes

$3,85\ L \to y$ personnes

$$y = \frac{8 \times 3,85}{2,2} = 14$$

Fanny prépare un cocktail pour 14 personnes.

2.2 Notion de ratio

Définition 11. On considère deux nombres quelconques a et b. On dit que a et b sont dans le ratio 2 : 3 lorsque $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.

Définition 12. On considère trois nombres quelconques a et b et c. On dit que a, b et c sont dans le ratio 2 : 3 : 5 lorsque $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$.

Propriété 15. *On considère trois nombres quelconques a et b et c. Lorsque a, b et c sont dans le ratio* 2 : 3 : 5 *alors* $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+3+5}$.

Démonstration :

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ donc d'après l'égalité des produits en croix, $5a = 2c$ et $5b = 3c$.
$5(a+b+c) = 5a+5b+5c = 2c+3c+5c = 10c$ donc $\frac{a+b+c}{10} = \frac{c}{5}$.

Propriété 16. *On considère trois nombres quelconques a et b et c et trois nombres non nuls α, β et γ. Lorsque a, b et c sont dans le ratio $\alpha : \beta : \gamma$ alors* $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Démonstration :

$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$ donc d'après l'égalité des produits en croix, $\gamma a = \alpha c$ et $\gamma b = \beta c$.
$\gamma(a+b+c) = \gamma a + \gamma b + \gamma c = \alpha c + \beta c + \gamma c = (\alpha+\beta+\gamma)c$ donc $\frac{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{c}{\gamma}$.

Exemple 5. Une boisson est composée de sirop et d'eau dans la proportion d'un volume de sirop pour sept volumes d'eau (c'est-à-dire dans le ratio 1 : 7).
Quelle est la quantité d'eau nécessaire pour préparer 560 mL de cette boisson ?

sirop	1
eau	7
total	

Exemple 6. Dans la recette de sauce pour salade de Thomas, les volumes de moutarde, de vinaigre et d'huile sont dans le ratio de 1 :3 :7.
Quelle quantité d'huile faut-il utiliser pour obtenir 330 mL de sauce pour salade ?

moutarde	
vinaigre	
huile	
total	

Pour obtenir 330 mL de sauce de salade, il faut utiliser ...... mL d'huile

Exemple 7. Le ration longueur :largeur d'un écran d'ordinateur est égal à 16 :9. La surface de l'écran a pour aire 1 334,38 cm^2. Déterminer la longueur et la largeur de cet écran en cm.

On note la longueur de l'écran $16x$, la largeur de l'écran est donc $9x$.
L'aire de l'écran est donc égale à $16x \times 9x$ soit $144x^2$.
On doit donc résoudre l'équation $144x^2 = 1\ 334,38$.
En divisant par 144 de chaque côté de l'égalité, on obtient $x^2 = \dfrac{1\ 334,38}{144} \approx 9,2665$.
Ainsi $x \approx \sqrt{9,2665} \approx 3,044$, donc $16x \approx 48,7$ et $9x \approx 27,4$.
L'écran a donc pour longueur environ 48,7 cm et pour largeur environ 27,4 cm.

2.3 Les unités de mesure

2.3.1 Les préfixes

Un kilogramme vaut 1 000 grammes. Un kilomètre vaut 1 000 mètres. Au préfixe kilo correspond 1 000, soit 10^3. A chaque préfixe correspond une puissance de 10, toujours la même, quelque soit la grandeur considérée.

Préfixe	Multiplicateur	Symbole
yotta	10^{24}	Y
zetta	10^{21}	Z
exa	10^{18}	E
péta	10^{15}	P
téra	10^{12}	T
giga	10^{9}	G
méga	10^{6}	M
kilo	10^{3}	k
hecto	10^{2}	h
déca	10	da

Préfixe	Multiplicateur	Symbole
déci	10^{-1}	d
centi	10^{-2}	c
milli	10^{-3}	m
micro	10^{-6}	μ
nano	10^{-9}	n
pico	10^{-12}	p
femto	10^{-15}	f
atto	10^{-18}	a
zepto	10^{-21}	z
yocto	10^{-24}	y

2.3.2 Longueur

L'unité de référence est le mètre, noté m.

Exemple 8. $32,5\ \mu m = 0,000\ 032\ 5\ m = 3,25 \times 10^{-5}\ m$
$152,3\ hm = 15\ 230\ m = 1,523 \times 10^4\ m$
$0,006\ 4\ km = 6,4\ m$
$1\ km = 100\ 000\ cm = 10^5\ cm$

2.3.3 Masse

L'unité de référence est le kilogramme, noté kg.

Exemple 9. $23\ g = 0,023\ kg$ $\quad$ $0,56\ kg = 560\ g$ $\quad$ $45,1\ dag = 0,451\ kg$

2.3.4 Durée

L'unité de référence est la seconde, noté s.

Exemple 10. $1\ jour = 24\ heures$
$1\ h = 3\ 600\ s$ $\quad$ $1\ s = \dfrac{1}{3\ 600}\ h$ $\quad$ donc $23\ s = \dfrac{23}{3\ 600}\ h$

$43\ min = 2580\ s$ $\quad$ $2\ h\ 12\ min = 2,2\ h = 7920\ s$

Remarque. Il faut en particulier savoir passer des heures/minutes/secondes aux heures décimales. En particulier : $30\ min = 0,5\ h$ $\quad$ $15\ min = 0,25\ h$ $\quad$ $45\ min = 0,75\ h$
$6\ min = 0,1\ h$ $\quad$ $12\ min = 0,2\ h$ $\quad$ $18\ min = 0,3\ h$ $\quad$ $24\ min = 0,4\ h$
$36\ min = 0,6\ h$ $\quad$ $42\ min = 0,7\ h$ $\quad$ $48\ min = 0,8\ h$ $\quad$ $54\ min = 0,9\ h$

2.3.5 Aire

Attention, le tableau de conversion pour les aires comporte deux colonnes par unité :

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	

On peut aussi parfois utiliser les unités agraires :
hectare, noté ha : $1\ ha = 1\ hm^2$
are, noté a : $1\ a = 100\ m^2 = 1\ dam^2$ $\quad$ $1\ ha = 100\ a$

Exemple 11. $18\ km^2 = 18\ 000\ 000\ m^2$ $\quad$ $34,2\ dm^2 = 0,342\ m^2 = 3\ 420\ cm^2$

2.3.6 Volume

Attention, le tableau de conversion pour les volumes comporte trois colonnes par unité :

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
														L	dL	cL	mL			

Les unités de contenance (L, dL, cL, etc.) sont également des unités de volume.
Il faut absolument retenir l'égalité : $1\ L = 1\ dm^3$

Exemple 12. $4,2\ m^3 = 4\ 200\ L$ $\quad$ $670\ dm^3 = 0,67\ m^3$ $\quad$ $24\ daL = 240\ dm^3$

2.3.7 Vitesse

L'unité de référence est le « mètre par seconde », noté m/s ou $m.s^{-1}$.

Il faut parfaitement maîtriser les conversions d'unités de longueur et de durée pour pouvoir convertir des unités de vitesse.

Exemple 13. Convertir $110\ km/h$ en m/s.
$110\ km \rightarrow 1\ h$ $\quad$ donc $110\ 000\ m \rightarrow 3\ 600\ s$
$x\ m \rightarrow 1\ s$ $\quad$ $x\ m \rightarrow 1\ s$

On fait un produit en croix : $x = \dfrac{110\ 000}{3\ 600} \approx 30,6$
Donc $110\ km/h \approx 30,6\ m/s$

Exemple 14. Convertir $340\ m.s^{-1}$ en $km.h^{-1}$.
$340\ m \rightarrow 1\ s$ $\quad$ donc $0,34\ km \rightarrow 1\ s$
$y\ km \rightarrow 1\ h$ $\quad$ $y\ km \rightarrow 1\ h$
$1\ h = 3600\ s$ donc $y = 0,34 \times 3600 = 1\ 224$
Donc $340\ m.s^{-1} = 1\ 224\ km.h^{-1}$

2.3.8 Masse volumique

L'unité de référence est le « kilogramme par mètre cube », noté kg/m^3 ou $kg.m^{-3}$.

Il faut parfaitement maîtriser les conversions d'unités de masse et de volume pour pouvoir convertir des unités de masse volumique.

Exemple 15. Convertir $35,6\ g.cm^{-3}$ en $kg.m^{-3}$.
$35,6\ g \to 1\ cm^3$ donc $0,0356\ kg \to 1\ cm^3$
$x\ kg \to 1\ m^3$ $x\ kg \to 1\ m^3$
$1\ m^3 = 10^6\ cm^3$ donc $x = 0,0356 \times 10^6 = 35\ 600$
Donc $35,6\ g.cm^{-3} = 35\ 600\ kg.m^{-3}$

Exemple 16. Convertir $5\ 640\ kg.m^{-3}$ en $g.cm^{-3}$.
$5\ 640\ kg \to 1\ m^3$ donc $5\ 640\ 000\ g \to 1\ 000\ 000\ cm^3$
$y\ g \to 1\ cm^3$ $y\ g \to 1\ cm^3$

On fait un produit en croix : $y = \dfrac{5\ 640\ 000}{1\ 000\ 000} = 5,64$
Donc $5\ 640\ kg.m^{-3} = 5,64\ g.cm^{-3}$

2.3.9 Débit

L'unité de référence est le « mètre cube par seconde », noté m^3/s ou $m^3.s^{-1}$.

Exemple 17. Convertir $5,04\ m^3.h^{-1}$ en $L.s^{-1}$.
$5,04\ m^3 \to 1\ h$ donc $5\ 040\ L \to 3\ 600\ s$
$x\ L \to 1\ s$ $x\ L \to 1\ s$
Donc $x = \dfrac{5\ 040}{3\ 600} = 1,4$

D'où : $5,04\ m^3.h^{-1} = 1,4\ L.s^{-1}$

2.3.10 Énergie

L'énergie peut s'exprimer en kilowatts-heures, noté $kW.h$ ou kWh.
Le kilowatt-heure est une unité de quantité d'énergie correspondant à celle consommée par un appareil de 1 000 watts (soit 1 kW) de puissance pendant une durée d'une heure. Afin de connaître l'énergie consommée par un appareil et si sa puissance est constante, il convient de multiplier celle-ci (en kilowatts) par sa durée d'utilisation (en heures).

Exemple 18. L'unité de référence est le joule, noté J. Un watt-heure vaut 3 600 joules. Combien de joules vaut un watt-seconde ?
Il y a 3 600 secondes dans une heure, donc $1\ J = 1\ Ws$

Exemple 19. Calculer l'énergie consommée en kWh par une ampoule de $100\ W$ allumée pendant $24\ h$ et convertir cette énergie en kilojoules.
$100\ W \times 24\ h = 2\ 400\ Wh = 2,4\ kWh$
$2,4\ kWh = 2\ 400\ Wh = 2\ 400\ W \times 3\ 600\ s = 8\ 640\ 000\ J = 8\ 640\ kJ$
L'énergie consommée est donc de $2,4\ kWh$, soit $8\ 640\ kJ$.

2.4 Échelles et Indices

Définition 13. Les dimensions sur un plan (ou sur une carte) sont proportionnelles aux dimensions réelles. L'échelle du plan (ou de la carte) est le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les dimensions sur le plan en fonction des dimensions réelles.
L'échelle s'exprime souvent sous forme fractionnaire : $\dfrac{dimensions\ sur\ le\ plan}{dimensions\ réelles}$.

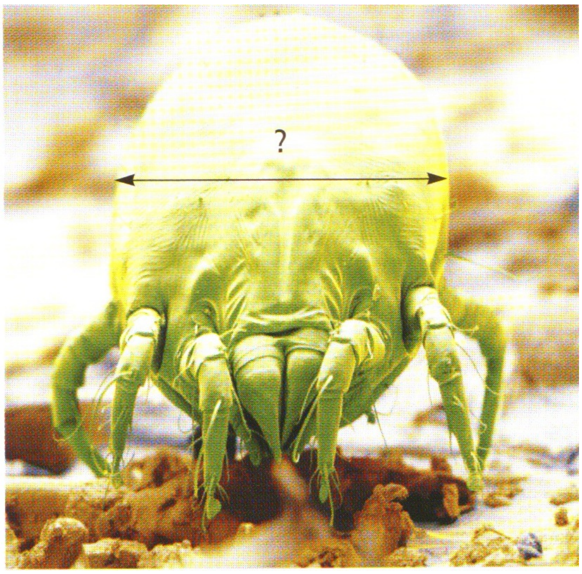
Attention, il faut que les dimensions soient exprimées dans la même unité.
L'échelle n'a, elle, pas d'unité.

Exemple 20. Sur une carte de France à l'échelle $\frac{1}{1\ 000\ 000}$, on mesure 20,7 cm entre l'aéroport de Marseille Marignane et celui de Perpignan Rivesaltes. Quelle est la distance réelle entre ces deux aéroports ?

1 cm sur la carte représentent 1 000 000 cm dans la réalité.

$20,7 \times 1\ 000\ 000\ cm = 20\ 700\ 000\ cm = 207\ km$
207 km séparent les deux aéroports dans la réalité.

Exemple 21. Voici une photo d'un acarien l'échelle 160. Calculer sa taille réelle (en mm).



L'acarien mesure 4 cm sur la photo, soit 40 mm.

$$\frac{40}{160} = 0,25$$

L'acarien mesure donc 0,25 mm dans la réalité.

Exemple 22. La Population de la France métropolitaine était en 2 000 de 58,796 millions d'habitants et en 2 005 de 60,702 millions. Pour présenter cette évolution à l'aide de la notion d'indice, on considère que la population de départ (en 2 000) est équivalente au nombre 100. Il s'agit là d'une convention.

On utilise ensuite un produit en croix :

$\frac{60,702}{58,796} \times 100 \approx 103,24$
On dit alors que l'indice de la population de la France métropolitaine est de 103,24 en 2 005 (base 100 en 2 000). Pour interpréter cette valeur, on dira que la population française a augmenté d'environ 3,24% entre 2 000 et 2 005.

2.5 Pourcentages

Exemple 23. 35% des élèves d'un collège de 600 élèves viennent en vélo. Combien d'élèves de ce collège viennent en vélo ?

$\frac{35 \times 600}{100} = 210$ 210 élèves de ce collège viennent en vélo.

Exemple 24. Sur les 600 élèves d'un collège, 487 sont demi-pensionnaires. Calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires dans ce collège.

$\frac{487}{600} \times 100 \approx 81,2$ Environ 81,2% des élèves de collège sont demi-pensionnaires.

Exemple 25. Une chemise coûte 35 euros. Pendant les soldes, elle subit une réduction de 40%. Quel est le prix soldé de la chemise ?

Première méthode :

On calcule d'abord le montant de la réduction : $\frac{40 \times 35}{100} = 14$

Puis, on n'oublie pas de calculer le prix final $35 - 14 = 21$

Le prix soldé de la chemise est 21 euros.

Deuxième méthode :

On généralise la méthode précédente : 21 a été obtenu à partir de $35-14$ qui vient de $35-\frac{40 \times 35}{100}$ et qu'on peut factoriser en $35\left(1-\frac{40}{100}\right)$. Ainsi, en multipliant le prix initial par $1-\frac{40}{100}$, on obtient directement le prix final. Cela signifie que diminuer un prix de 40% revient à le multiplier par $1-\frac{40}{100}$.

Propriété 17. *Augmenter un prix de x% revient à le multiplier par $1+\frac{x}{100}$.*

Diminuer un prix de x% revient à le multiplier par $1-\frac{x}{100}$.

Exemple 26. Une papeterie augmente ses prix de 5%. Quel est le nouveau prix d'un cahier de 3 € initialement ?

$3 \times \left(1+\frac{5}{100}\right) = 3 \times 1,05 = 3,15$ Le cahier coûte maintenant 3,15 €.

Exemple 27. Après une augmentation de 20%, une console de jeu coûte 96 €. Quel était son prix avant l'augmentation ?

augmentation de 20% : coefficient de 1,2
On cherche le prix initial, donc on fait une division : $96 : 1,2 = 80$.
La console coûtait 80 € avant l'augmentation.

Exemple 28. La valeur d'une action baisse de 30% au courant du mois de janvier, puis, en février, la valeur de l'action augmente de 30%. L'action a-t-elle retrouvé sa valeur initiale ?

baisse de 30% : coefficient de 0,7 augmentation de 30% : coefficient de 1,3
$0,7 \times 1,3 = 0,91$ L'action n'a donc pas retrouvé sa valeur initiale, elle a baissé globalement de 9%.

Exemple 29. Le prix d'un article passe de 90 € à 112,50 €. De quel pourcentage son prix a-t-il augmenté ?

Pour déterminer un pourcentage d'augmentation ou de baisse, on calcule toujours le quotient :

$$\frac{prix\ final}{prix\ initial}$$

Si le résultat est supérieur à 1 (augmentation), alors pour déterminer le pourcentage de hausse, on enlève 1 au résultat puis on multiplie par 100.
Si le résultat est inférieur à 1 (réduction), alors pour déterminer le pourcentage de baisse, on enlève le résultat à 1, puis on multiplie le résultat par 100.

Ici, on fait donc $\frac{112,5}{90} = 1,25$, donc le prix de l'article a augmenté de 25%.

Exemple 30. La population d'un village est passé de 514 habitants à 306. Déterminer le pourcentage de baisse.

$\frac{306}{514} \approx 0,59$ La population du village a baissé d'environ 41%.

2.6 Règles de calcul

2.6.1 Priorités opératoires

Propriété 18. *La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction. Les puissances sont prioritaires sur les multiplications et les divisions.*

Remarque. Ces règles restent valables avec des nombres relatifs ou des fractions !
De manière générale, il est fortement recommandé de revenir à la ligne à chaque étape d'un calcul.

2.6.2 Nombres relatifs

Propriété 19. *Pour additionner deux nombres relatifs de même signe, on ajoute les distances à zéro et on garde le signe commun.*
Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires, on soustrait les distances à zéro, et on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro.

Définition 14. Lorsque la somme de deux nombres relatifs est égale à zéro, on dit que les deux nombres sont opposés.

Propriété 20. *Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.*

Exemple 31. $5,8 - 11,2 = -5,4$ $-4,7 - 18,4 = -23,1$

Propriété 21. *Pour multiplier des nombres relatifs, on effectue le produit des distances à zéro et on applique la règle des signes suivante :*
- *le produit de deux nombres de même signe est positif.*
- *le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.*

Propriété 22. *Pour diviser deux nombres relatifs, on effectue le quotient des distances à zéro et on applique la règle des signes suivante :*
- *le quotient de deux nombres de même signe est positif.*
- *le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.*

Exemple 32. $-4 \times (-7) = 28$ $7,3 \times (-9) = -65,7$ $\frac{-10}{-5} = 2$ $21 : (-3) = -7$

2.6.3 Écritures fractionnaires

Propriété 23. *Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur, on garde le dénominateur commun et on additionne (ou on soustrait) les numérateurs.*

Exemple 33. $\dfrac{3}{7}+\dfrac{9}{7}=\dfrac{12}{7}$ $\qquad$ $\dfrac{4}{3}-\dfrac{10}{3}=\dfrac{-6}{3}=-2$

Remarque. Un résultat de calcul doit TOUJOURS être simplifié au maximum.

Propriété 24. *Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, il faut commencer par réduire les deux écritures fractionnaires au même dénominateur.*

Exemple 34. $\dfrac{7}{10}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{7\times 3}{10\times 3}+\dfrac{4\times 2}{15\times 2}=\dfrac{21}{30}+\dfrac{8}{30}=\dfrac{29}{30}$

$\dfrac{2}{3}-\dfrac{23}{5}=\dfrac{2\times 5}{3\times 5}-\dfrac{23\times 3}{5\times 3}=\dfrac{10}{15}-\dfrac{69}{15}=-\dfrac{59}{15}$

Propriété 25. *Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.*

Remarque. Attention, il faut toujours vérifier si on peut simplifier avant d'effectuer des multiplications inutiles et compliquées !

Exemple 35. $\dfrac{5}{8}\times\dfrac{7}{3}=\dfrac{35}{24}$ $\qquad$ $\dfrac{63}{40}\times\dfrac{35}{81}=\dfrac{7\times 9\times 7\times 5}{8\times 5\times 9\times 9}=\dfrac{49}{72}$

Définition 15. Quand le produit de deux nombres est égal à 1, on dit que ces deux nombres sont inverses.

Propriété 26. *Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.*

Exemple 36. $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{5}}=\dfrac{2}{7}:\dfrac{9}{5}=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{63}$ $\qquad$ $\dfrac{54}{21}:\dfrac{27}{42}=\dfrac{54}{21}\times\dfrac{42}{27}=\dfrac{27\times 2\times 21\times 2}{21\times 27}=4$

2.6.4 Puissances

Définition 16. Si a est un nombre et si n est un entier positif, on définit a^n (se lit « a exposant n ») comme le produit de n facteurs égaux à a.
Par convention, si a est non nul, $a^0=1$.

Exemple 37. $5^6=5\times5\times5\times5\times5\times5=15\,625$ $\qquad$ $(-2)^5=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=-32$

$\left(\dfrac{7}{4}\right)^3=\dfrac{7}{4}\times\dfrac{7}{4}\times\dfrac{7}{4}=\dfrac{343}{64}$ $\qquad$ $89^0=1$

Définition 17. Si a est un nombre non nul et si n est un entier, on note a^{-n} l'inverse de a^n.
Ainsi, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Exemple 38. $5^{-1}=\dfrac{1}{5}=0,2$ $\qquad$ $8^{-2}=\dfrac{1}{64}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-3}=\left(\dfrac{3}{7}\right)^3=\dfrac{27}{343}$

Propriété 27. *Pour tous nombres a et b non nuls et pour tous nombres entiers relatifs m et n, on a :*

$a^m\times a^n=a^{m+n}$ $\qquad$ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $\qquad$ $(a^m)^n=a^{mn}$ $\qquad$ $(ab)^n=a^nb^n$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

Exemple 39. $7^4\times7^{-9}=7^{-5}$ $\qquad$ $(-11)^3\times(-11)^7=(-11)^{10}=11^{10}$ $\qquad$ $\dfrac{3^2}{3^8}=3^{-6}$

$\dfrac{4^{-1}}{4^{-9}}=4^8=(2^2)^8=2^{16}$ $\qquad$ $56^3=7^3\times8^3$ $\qquad$ $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-2}=\dfrac{8^{-2}}{9^{-2}}=8^{-2}\times9^2=(2^3)^{-2}\times(3^2)^2=2^{-6}\times3^4$

2.6.5 Notation scientifique

Définition 18. Un nombre décimal est écrit en notation scientifique lorsqu'il est présenté sous la forme du produit d'un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) par une puissance de 10.

Exemple 40. $45\ 000 = 4,5 \times 10^4$ $\qquad 0,000\ 000\ 7 = 7 \times 10^{-7}$

2.6.6 Exemples

Effectuer les calculs suivants en indiquant les étapes. On donnera le résultat du calcul D sous la forme d'une puissance de 2 et les résultats des calculs E et F en notation scientifique.

$A = \dfrac{7}{15} - \dfrac{2}{15} \times \dfrac{9}{4}$ $\qquad B = \left(\dfrac{4}{5} : \dfrac{2}{3}\right) \times \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\right)$ $\qquad C = \dfrac{\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{7}}{\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{2}}$

$D = \dfrac{2^{-3} \times 8^5}{4^3 \times 16^2}$ $\qquad E = \dfrac{3 \times 10^5 \times 4 \times (10^{-3})^2}{16 \times 10^{-4}}$ $\qquad F = \dfrac{3 \times 10^5 - 6 \times 10^3}{3 \times 10^{11}}$

2.7 Racines carrées

Définition 19. Si a est un nombre positif, on appelle racine carrée de a, et on note $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré vaut a.

Remarque. Si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(-\sqrt{a})^2 = a$

Exemple 41. $\sqrt{81} = 9$ $\qquad \sqrt{169} = 13$ $\qquad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ $\qquad \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

$\left(2 \times \sqrt{3}\right)^2 = 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} = 4 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12$

Il faut connaître par cœur la liste des 15 premiers carrés parfaits.

Nombre	Carré
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Nombre	Carré
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Nombre	Carré
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225

Chapitre 3

Géométrie dans l'espace

3.1 Les différents solides

Définition 20. Un polyèdre est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

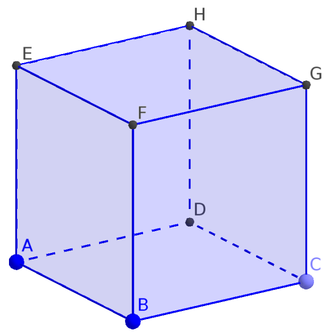
Définition 21. Un polyèdre est dit régulier si toutes ses faces sont identiques et régulières (i.e. côtés de la même longueur et angles de la même mesure) et si tous les sommets sont identiques (i.e. même nombre d'arêtes qui convergent à chaque sommet).

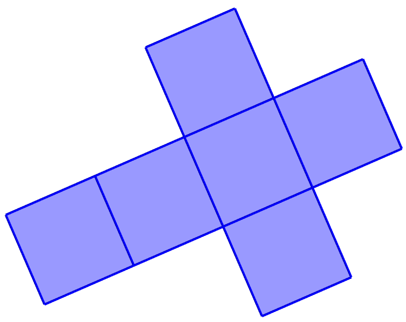
3.1.1 Le cube

Définition 22. Un cube est un polyèdre régulier dont toutes les faces sont des carrés.

Remarque. Le cube a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Toutes les faces sont des carrés identiques.

Propriété 28. *Le volume d'un cube d'arête c est :* $V = c^3$





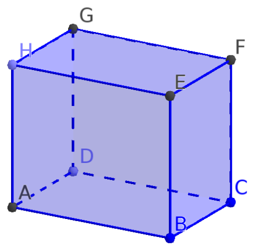
Il y a 11 patrons de cube différents.

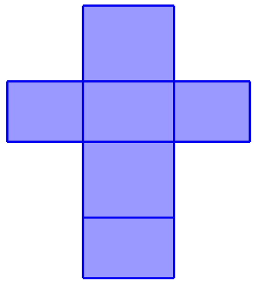
3.1.2 Le parallélépipède rectangle

Définition 23. Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont toutes les faces sont des rectangles.

Remarque. Le parallélépipède rectangle est aussi appelé le pavé droit. Il a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Ses faces sont des rectangles identiques deux à deux. Le cube est un cas particulier de pavé droit.

Propriété 29. *Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur l, de largeur L, et de hauteur h est :* $V = l \times L \times h$





3.1.3 Le prisme droit

Définition 24. Un prisme droit est un polyèdre qui a deux faces, parallèles et superposables, appelées les bases, et dont les autres faces, appelées les faces latérales, sont des rectangles.

Définition 25. La distance entre les deux bases est appelée la hauteur du prisme.

Remarque. On parle ainsi de prisme droit à base triangulaire, de prisme droit à base hexagonale, etc., suivant la nature des bases.
Le pavé droit (et donc le cube) sont des cas particuliers de prismes droits.

Définition 26. On appelle l'aire latérale d'un prisme l'aire de l'ensemble des faces latérales.

Remarque. On calcule donc l'aire latérale d'un prisme par la somme d'aires de rectangles.

Propriété 30. *L'aire d'un prisme droit est égale à la somme de l'aire latérale et du double de l'aire d'une base.*

Propriété 31. *Le volume d'un prisme droit est égale au produit de l'aire d'une de ses bases par la hauteur du prisme.*

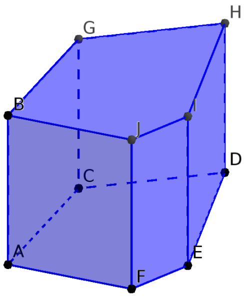


Figure 3.1 – prisme droit à base pentagonale

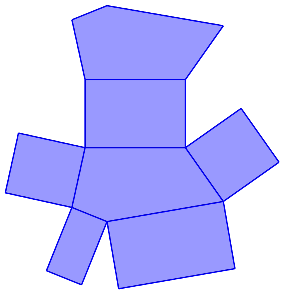


Figure 3.2 – patron d'un prisme droit à base pentagonale

3.1.4 Le cylindre de révolution

Définition 27. Le cylindre de révolution est obtenu par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés.

Remarque. « Révolution » vient du latin « revolvere » formé à partir de la racine « volv- » signifiant « rouler ».

Le cylindre de révolution possède deux faces, identiques et parallèles, qui sont des disques (et une face courbe). La droite joignant les centres de chaque base est perpendiculaire aux bases.

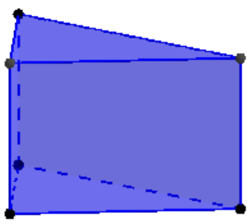


FIGURE 3.3 – prisme droit à base triangulaire

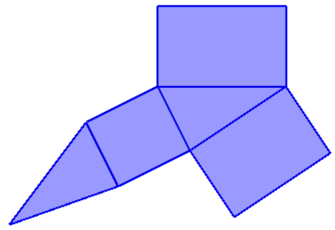
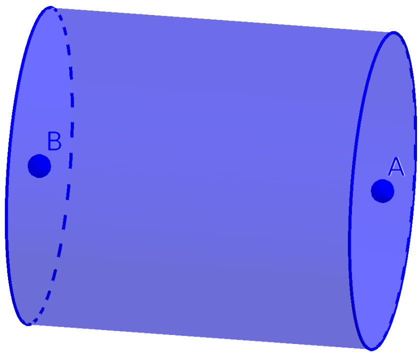
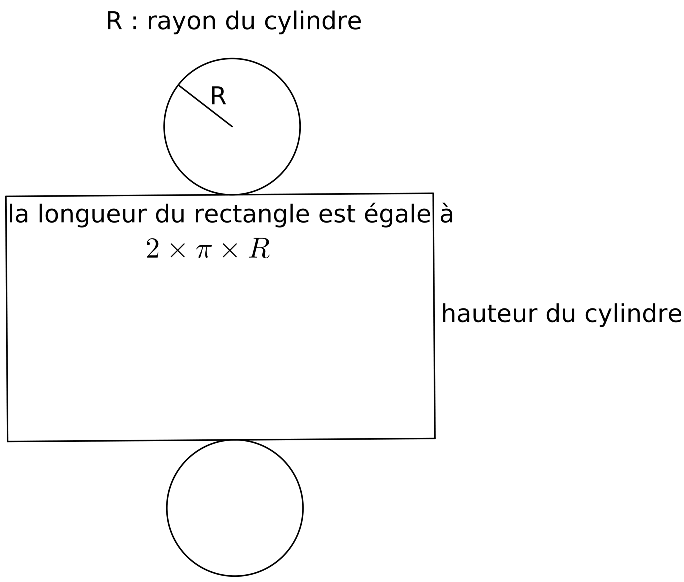


FIGURE 3.4 – patron d'un prisme droit à base triangulaire





Définition 28. La distance entre les deux bases est appelée la hauteur du cylindre.

Propriété 32. *L'aire latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à :* $A_{lat} = 2\pi Rh$

Propriété 33. *L'aire totale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à :* $A_{tot} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

Propriété 34. *Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à :* $V = \pi R^2 h$

3.1.5 La pyramide

Définition 29. Une pyramide de sommet S est un polyèdre délimité par un polygone ne contenant pas S, appelé la base, et des triangles de sommet S ayant un côté en commun avec la base, appelés faces latérales.

Définition 30. La hauteur d'une pyramide de sommet S est le segment [SH], perpendiculaire au plan de la base, où H est un point de ce plan. On appelle aussi hauteur la longueur SH.

Définition 31. Une pyramide est dite régulière lorsque sa base est un polygone régulier et que sa hauteur passe par le centre de la base.

Définition 32. Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Remarque. Un tétraèdre régulier est donc une pyramide dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux superposables.

Propriété 35. *Le volume d'une pyramide de hauteur h est égal à :* $V = \dfrac{A_{base} \times h}{3}$

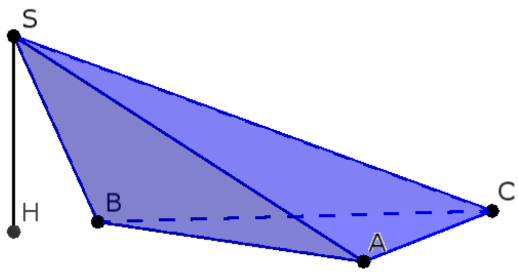


FIGURE 3.5 – pyramide à base triangulaire

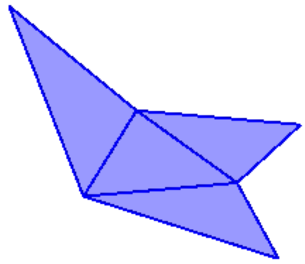


FIGURE 3.6 – patron d'une pyramide à base triangulaire

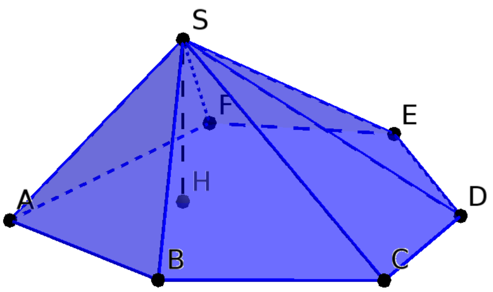


FIGURE 3.7 – pyramide à base hexagonale

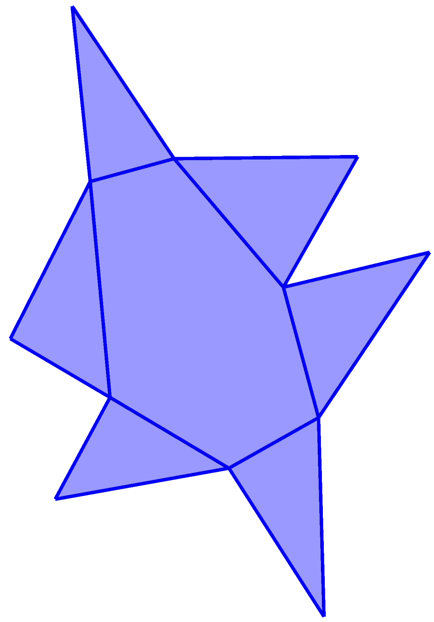


FIGURE 3.8 – patron d'une pyramide à base hexagonale

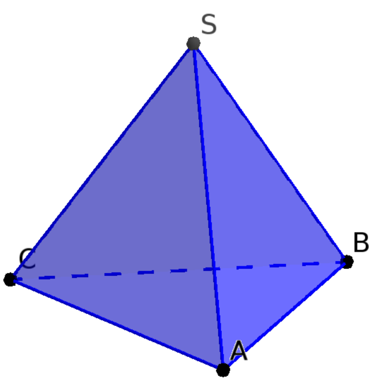


FIGURE 3.9 – tétraèdre régulier

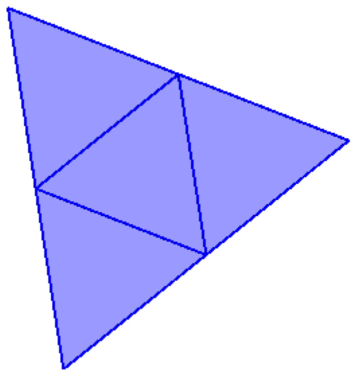


FIGURE 3.10 – patron d'un tétraèdre régulier

3.1.6 Le cône de révolution

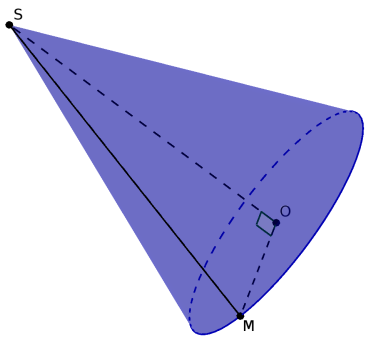
Définition 33. Un cône de révolution de sommet S est le solide engendré par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O autour de l'axe (SO). Le disque de centre O et de rayon [OM] est la base de ce cône. Le segment [SO] est la hauteur de ce cône (la longueur SO également). Le segment [SM] est une génératrice de ce cône.

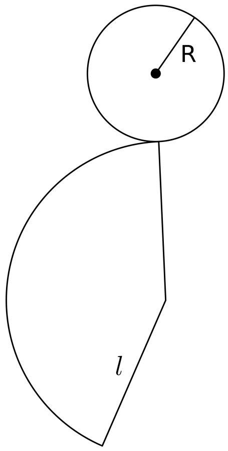
Remarque. Un cône de révolution possède une face qui est un disque et une face courbe.

Propriété 36. *L'aire latérale d'un cône de révolution de rayon R et de génératrice l est égale à :* $A_{lat} = \pi R l$

Propriété 37. *L'aire totale d'un cône de révolution de rayon R et de génératrice l est égale à :* $A_{tot} = \pi R^2 + \pi R l = \pi R(R + l)$

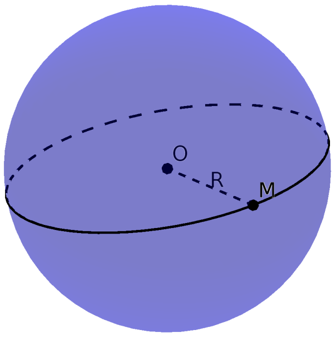
Propriété 38. *Le volume d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h est égale à :* $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$





3.1.7 La sphère

Définition 34. Une sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM = R.



Définition 35. Un grand cercle d'une sphère de centre O et de rayon R est un cercle de centre O et de rayon R.

Définition 36. Une boule est l'intérieur d'une sphère.

Propriété 39. *L'aire d'une sphère de rayon R est égale à :* $A = 4\pi R^2$

Propriété 40. *Le volume d'une boule de rayon R est égal à :* $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

3.2 Sections par un plan

3.2.1 Section d'un prisme droit par un plan parallèle à la base

Propriété 41. *La section d'un prisme droit par un plan parallèle à la base est un polygone identique à la base.*

Remarque. La section d'un cube par un plan parallèle à une de ses faces est donc un carré, identique à une face. La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est donc un rectangle, identique à la face.

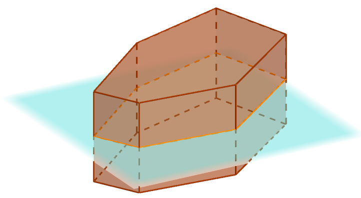


Figure 3.11 – Section d'un prisme droit par un plan parallèle à la base

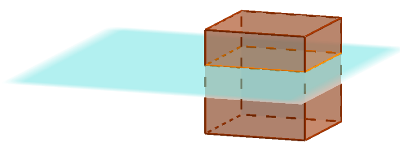


Figure 3.12 – Section d'un cube par un plan parallèle à la base

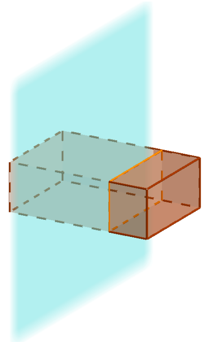


Figure 3.13 – Section d'un pavé droit par un plan parallèle à la base

3.2.2 Section d'un prisme droit par un plan parallèle à une arête

Propriété 42. *La section d'un prisme droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.*

Remarque. La section d'un cube par un plan parallèle à une arête est un rectangle. La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

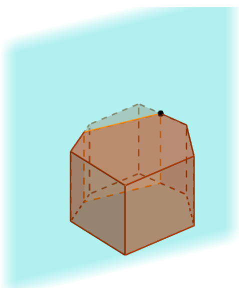


Figure 3.14 – Section d'un prisme droit par un plan parallèle une arête

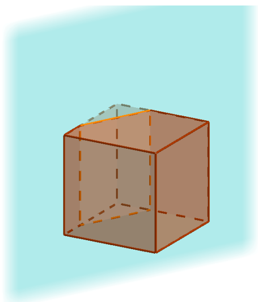


Figure 3.15 – Section d'un cube par un plan parallèle à une arête

3.2.3 Sections d'un cylindre par un plan parallèle ou perpendiculaire à sa base

Propriété 43. *La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base est un cercle, identique à la base.*

Propriété 44. *La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à sa base est un rectangle.*

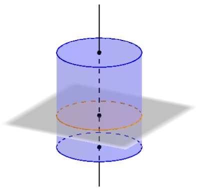


FIGURE 3.16 – Section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base

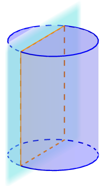


FIGURE 3.17 – Section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à la base

3.2.4 Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base

Propriété 45. *La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone, réduction de la base.*

Propriété 46. *La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un cercle, réduction de la base.*

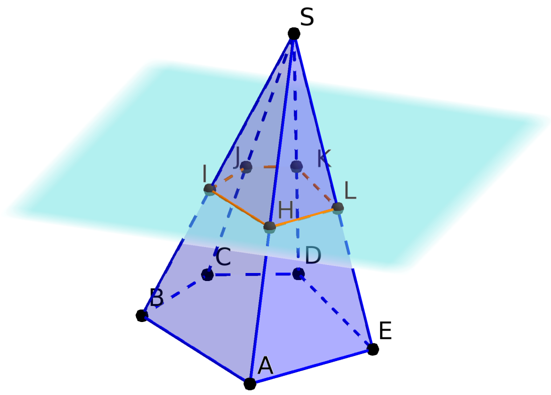


FIGURE 3.18 – Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base

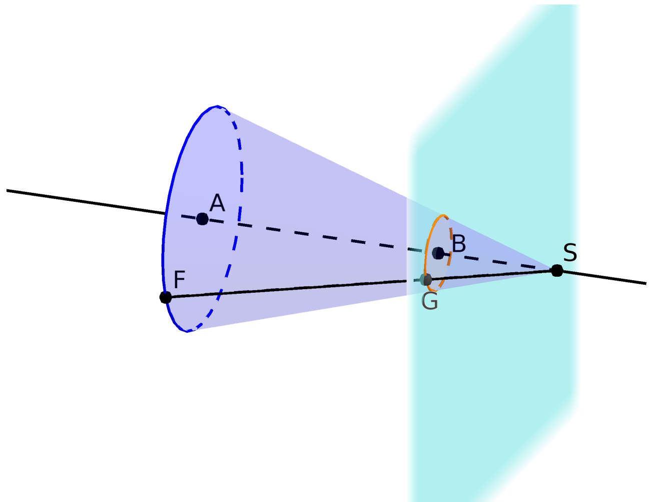


FIGURE 3.19 – Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base

Propriété 47. *Les longueurs des côtés du polygone de réduction (resp. du rayon du cercle de section) sont proportionnelles aux longueurs des côtés du polygone de base (resp. du rayon du cercle de base).*

Définition 37. On appelle coefficient de réduction, noté k, le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les longueurs de la réduction à partir des longueurs de la base.

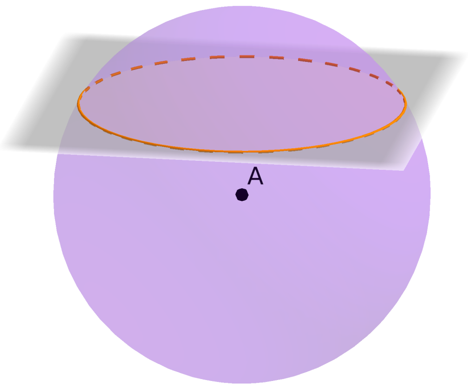
Remarque. Dans la figure 18, on a donc $k = \dfrac{SH}{SA} = \dfrac{SI}{SB} = \dfrac{KL}{DE} = \ldots$

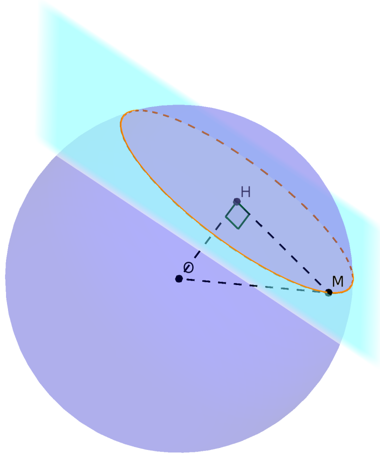
Dans la figure 19, on a donc $k = \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{SG}{SF} = \dfrac{BG}{AF} = \ldots$

Propriété 48. *Dans une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2, et les volumes sont multipliés par k^3.*

3.2.5 Section d'une sphère par un plan

Propriété 49. *La section d'une sphère par un plan est un cercle.*



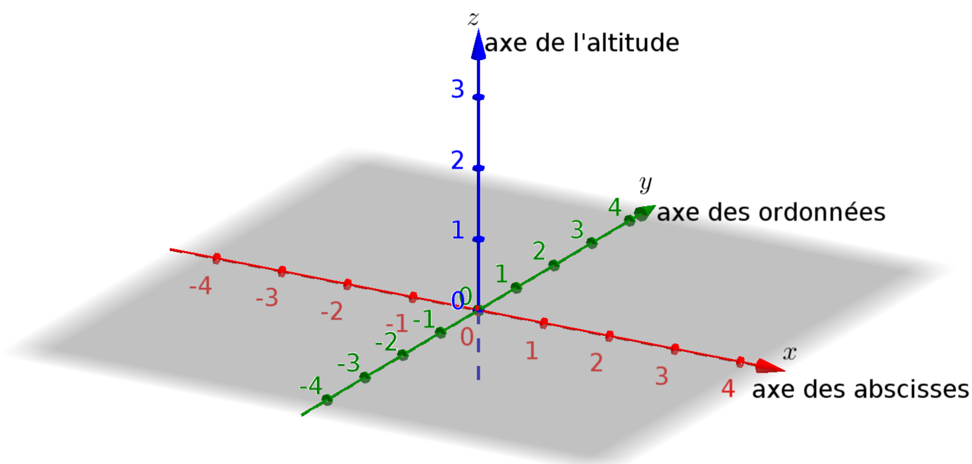


Propriété 50. *On considère une sphère de centre O et de rayon R. La section de cette sphère par un plan est un cercle de centre H et de rayon r. On a la relation suivante :* $OH = \sqrt{R^2 - r^2}$

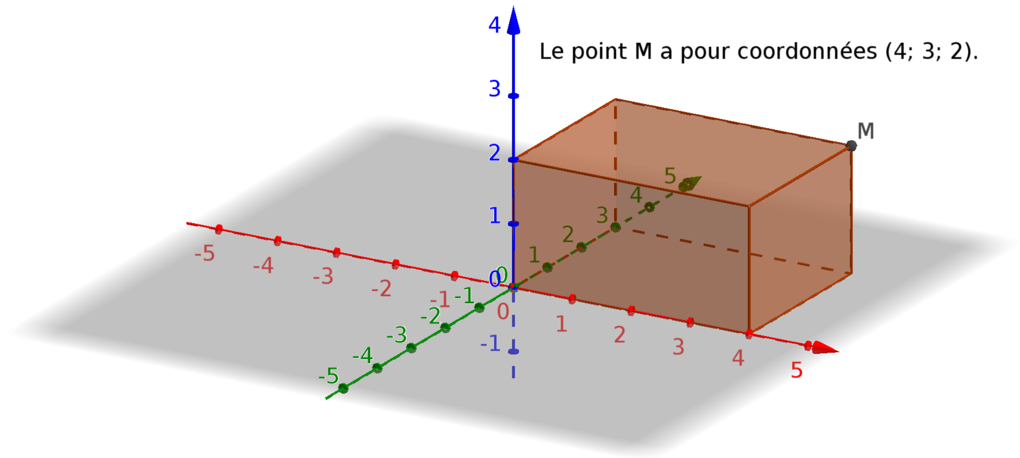
3.3 Repérage

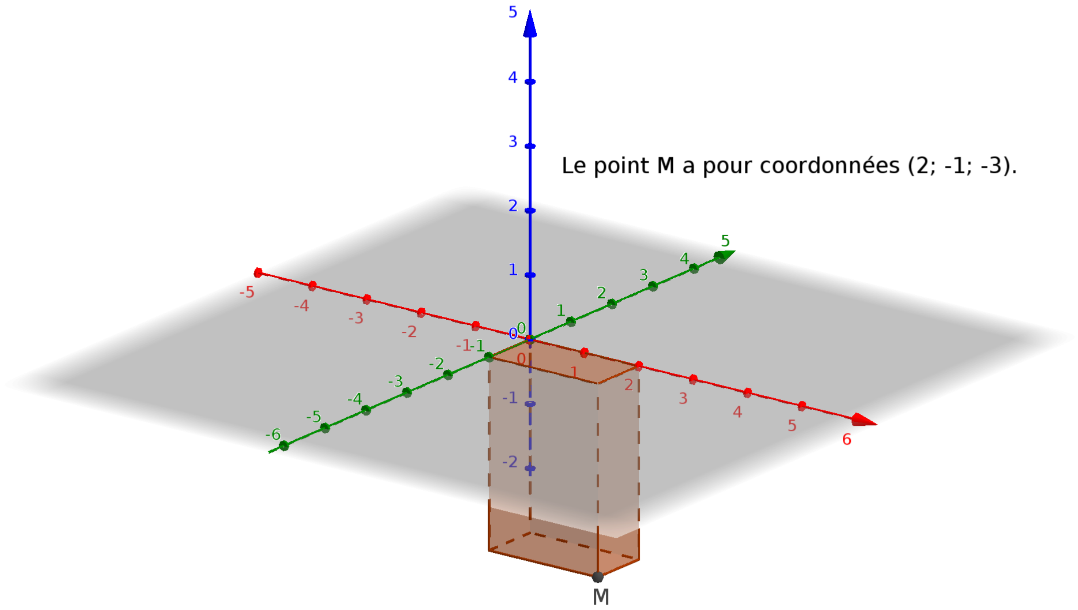
3.3.1 Sur le pavé droit : abscisse, ordonnée, altitude

Pour repérer un point dans un plan, on utilise un repère, composé de deux axes : l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Chaque point est alors repéré par un couple de nombres : ses coordonnées. On peut procéder de manière analogue pour repérer un point dans l'espace. On a cette fois besoin d'un repère composé de trois axes, et chaque point est repéré par un triplet de nombres. Le premier est l'abscisse, le deuxième l'ordonnée, et on appelle le troisième nombre l'altitude ou la cote.



Un parallélépipède rectangle peut nous aider à visualiser les coordonnées d'un point.





3.3.2 Sur la sphère : latitude et longitude

Définition 38. On considère une sphère de centre O et de rayon R et une droite passant par O. Cette droite coupe la sphère en deux points A et B. On considère ensuite un plan P perpendiculaire à la droite (AB) situé à une distance inférieure à R du point O. La section de la sphère par le plan P définit un cercle que l'on appelle un parallèle. La latitude est la mesure, en degrés, de l'angle de sommet O qui sépare le parallèle considéré du parallèle origine.

Remarque. Tous les points de la sphère situés sur un même parallèle ont la même latitude.

Définition 39. On considère une sphère de centre O et une droite passant par O. Cette droite coupe la sphère en deux points A et B. Un demi-grand cercle passant par A et B est appelé un méridien de la sphère. La longitude est la mesure, en degrés, de l'angle qui sépare le méridien considéré du méridien origine.

Remarque. Tous les points de la sphère sur un même méridien ont la même longitude.

Remarque. Parallèles et méridiens se coupent à angles droits.

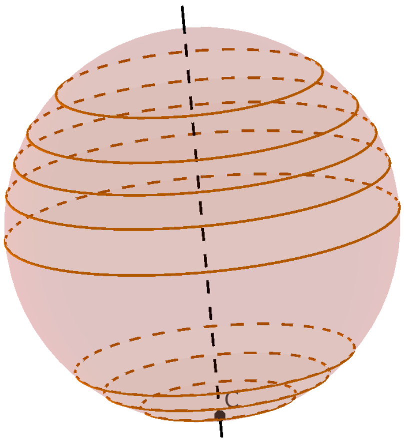


Figure 3.20 – Sphère avec quelques parallèles

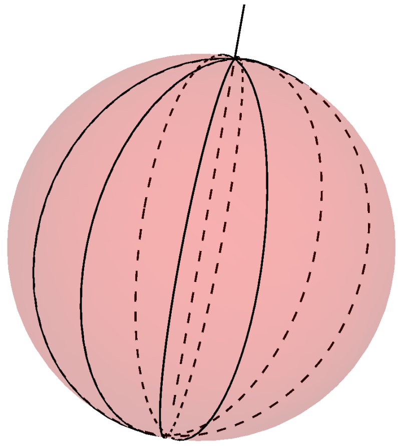
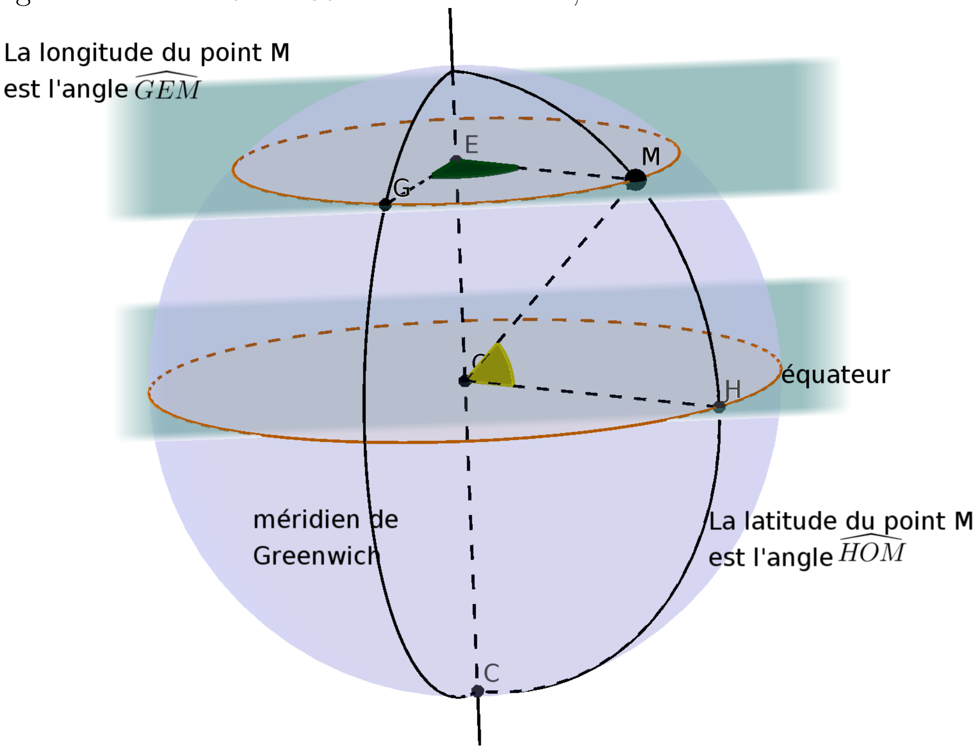


Figure 3.21 – Sphère avec quelques méridiens

Cas particulier de la sphère terrestre Les deux points A et B des définitions précédentes sont les pôles Nord et Sud. Le parallèle d'origine, où les points ont par définition une latitude égale à zéro, est l'équateur. Le méridien d'origine, où les points ont par définition une longitude égale à zéro, est le méridien de Greenwich. Chaque point de la terre peut donc être repéré par ses coordonnées géographiques (latitude ; longitude). La latitude varie de 0° à 90° soit vers le nord, soit vers le sud. La longitude varie de 0° à 180° soit vers l'ouest, soit vers l'est.



Chapitre 4

Notion de fonction

4.1 Définitions, notations

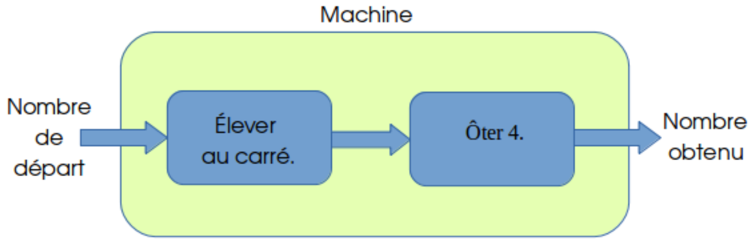
4.1.1 Première approche

Voici deux manières de présenter « concrètement » une fonction

Programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Élever le nombre au carré.
- Ôter 4 au résultat.

Machine à faire des calculs :



Dans chacune des représentations, si on appelle « x » le nombre de départ, le nombre obtenu à l'arrivée est « $x^2 - 4$ ».

4.1.2 Définitions, notations et exemples

Définition 40. A un nombre « x », une fonction f associe un nombre et un seul que l'on note $f(x)$ (on lit « f de x »).
On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.

Exemple 42. A un nombre, on associe son triple. On définit ainsi une fonction f et on peut noter :
$f(x) = 3x$ qui se lit « f de x égal $3x$ » ou
$f : x \mapsto 3x$ qui se lit « f, qui à x associe $3x$ ».
Déterminons l'image de 2 par f :
$f(2) = 3 \times 2 = 6$
On peut dire : « 2 a pour image 6 par la fonction f » ou « 6 est l'image de 2 par la fonction f ».

Définition 41. Lorsque l'image d'un nombre a par une fonction f est un nombre b (ie $f(a) = b$), on dit aussi que a est un antécédent de b par f.

Exemple 43. On considère la fonction $f : x \mapsto x + 5$.
$f(-8) = -3$ donc -8 est un antécédent de -3 par la fonction f.

4.2 Expression algébrique

Exemple 44. On considère la fonction $g : x \mapsto -2x^2 - 3$

1. Déterminer les images de 0, -2 et 3.
2. Déterminer les antécédents de -35.

1. $g(0) = -2 \times 0 - 3 = -3$.
   $g(-2) = -2 \times (-2)^2 - 3 = -2 \times 4 - 3 = -8 - 3 = -11$.
   $g(3) = -2 \times 3^2 - 3 = -2 \times 9 - 3 = -18 - 3 = -21$.
   Les images de 0, -2 et 3 par la fonction g sont respectivement -3, -11 et -21.
2. On cherche x tel que $g(x) = -35$. Cela revient donc à résoudre une équation.
   $-2x^2 - 3 = -35$
   $-2x^2 = -32$
   $x^2 = 16$
   $x = 4$ ou $x = -4$
   -35 a donc deux antécédents par la fonction g, 4 et -4.

4.3 Tableau de valeurs

Exemple 45. On donne un tableau de valeurs d'une fonction h.

x	-3	-2,5	-1	0	1	1,6	2	3
$h(x)$	-53	-37,5	-7	1	-1	-7	-13	-35

1. Déterminer les images de -3 et de 0.
2. Déterminer les antécédents de -7.

1. $h(-3) = -53$ et $h(0) = 1$ donc les images de -3 et de 0 sont respectivement -53 et 1.
2. Les antécédents de -7 par la fonction h sont -1 et 1,6.

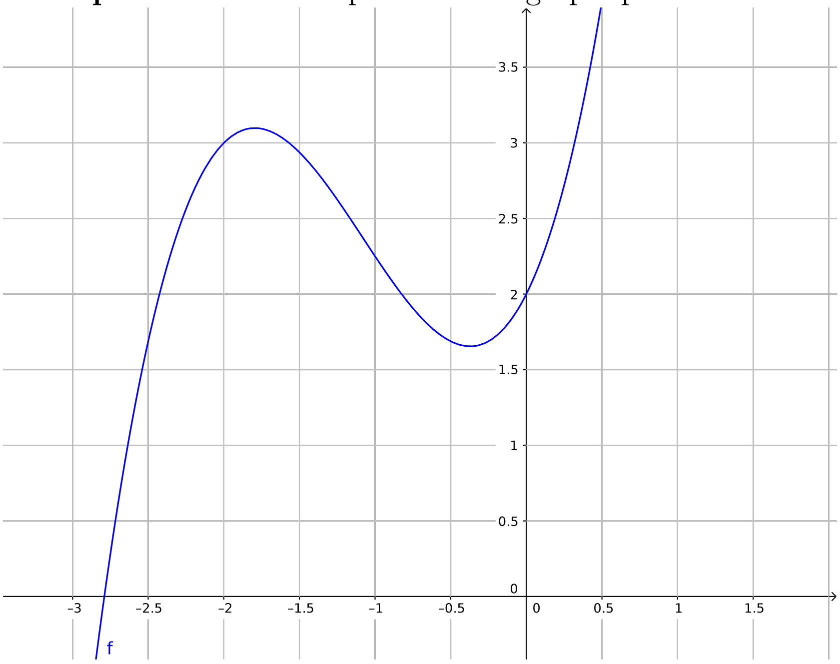
4.4 Représentation graphique

On rappelle que l'axe des abscisses est l'axe horizontal et que l'axe des ordonnées est l'axe vertical. Quand on donne les coordonnées d'un point, on donne l'abscisse en premier et l'ordonnée en deuxième.

Définition 42. La représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse par la fonction f. On appelle généralement $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

Ainsi $M(a; b) \in \mathscr{C}_f$ signifie que b est l'image de a par la fonction f ou encore $b = f(a)$.

Exemple 46. Voici la représentation graphique d'une fonction f.



1. Déterminer l'image de -2 par la fonction f.
2. Déterminer $f(-1)$.
3. Déterminer le ou les antécédent(s) de 2.
4. Combien d'antécédent(s) a 3,5 ?

1. L'image de -2 par la fonction f est 3 : $f(-2) = 3$.
2. $f(-1) = 2,25$.
3. 2 a trois antécédents : environ -2,4, environ -0,8 et 0.
4. 3,5 a un seul antécédent (environ 0,4).

Chapitre 5

Calcul littéral

5.1 Vocabulaire

Définition 43. Une somme est le résultat d'une addition. Un produit est le résultat d'une multiplication.
Les termes sont les éléments d'une somme. Les facteurs sont les éléments d'un produit.

Remarque. Une différence est le résultat d'une soustraction. Mais une différence peut s'écrire sous la forme d'une somme algébrique. Par exemple : $8 - 2x = 8 + (-2x)$ donc $8 - 2x$ est bien également une somme.

Exemple 47. $A = 10x$ est un produit. $B = 5 + 4(2x + 3)$ est une somme.
$C = 2(x + y)$ est un produit. $D = ab + cd$ est une somme.
$E = 4x^2 + 16x + 16$ est une somme. $F = 5y + 1$ est une somme.
$G = (x - 1)^2 - 4$ est une somme. $H = (x - 3)(x + 12)$ est un produit.

Définition 44. Réduire une expression algébrique, c'est l'écrire avec le moins de termes possible.

Remarque. Quand une expression est réduite au maximum, il n'y a plus de signe $\times$ (les produits ont été effectués), mais il peut rester des signes $+$ ou $-$.

Exemple 48. Réduire les expressions suivantes au maximum :

$$I = 3m^2 + 3 \times 2F + 2 \times 4 + 7 \times m^2 + 1 + 13F$$

$$J = 7x \times x - 11y + 5 - 3 \times x^2 - 2 \times 8 - 4y$$

$$K = (2x^3)^2 - 15x + 7x \times x^2 + x^6 - 9x^3 + 5$$

$$L = (-3x)^2 - 7 + 5x - 9x + 1$$

$$M = -(3x)^2 - 4x + 3x - 8 + 4$$

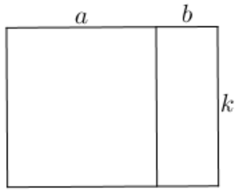
5.2 Développer un produit

Définition 45. Développer, c'est transformer un produit en somme.

5.2.1 Distributivité simple

Propriété 51. *Pour tous nombres k, a et b, on a :* $k(a+b) = ka + kb$

Démonstration :



Exemple 49. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$N = 4(a + 2b)$

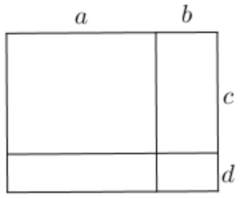
$M = -2x(3x - 2y)$

$P = -5(2x + 3) - 8(3 - 2x)$

5.2.2 Distributivité double

Propriété 52. *Pour tous nombres a, b, c et d, on a :* $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Démonstration :



Exemple 50. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$Q = (2x + 5)(7x - 4)$

$R = (11 - 9x)(2x - 7)$

$S = (3x + 1)(2x - 5) - (2x - 3)(x + 8)$

5.2.3 Carré d'une somme

Propriété 53. *Pour tous nombres a et b, on a :* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration :
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Remarque. C'est la première identité remarquable.
Le terme $2ab$ est appelé le « double produit ».

Exemple 51. $T = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

$U = (2x + 7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$

$V = (13x + 4)^2 = 169x^2 + 104x + 16$

5.2.4 Carré d'une différence

Propriété 54. *Pour tous nombres a et b, on a :* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration :
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Remarque. C'est la deuxième identité remarquable.

Exemple 52. $W = (x-9)^2 = x^2 - 18x + 81$

$X = (6x-5)^2 = 36x^2 - 60x + 25$

$Y = (11x-8)^2 = 121x^2 - 176x + 64$

5.2.5 Produit d'une somme par une différence

Propriété 55. *Pour tous nombres a et b, on a :* $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Démonstration :
$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

Remarque. C'est la troisième identité remarquable.

Exemple 53. $Z = (x+12)(x-12) = x^2 - 144$

$A_1 = (2x-7)(2x+7) = 4x^2 - 49$

$B_1 = (5x+11)(5x-11) = 25x^2 - 121$

5.2.6 Applications au calcul mental

Exemple 54. $102^2 = (100+2)^2 = 10\ 000 + 400 + 4 = 10\ 404$

$99^2 = (100-1)^2 = 10\ 000 - 200 + 1 = 9\ 801$

$102 \times 98 = (100+2)(100-2) = 10\ 000 - 4 = 9\ 996$

5.3 Factoriser une somme

Définition 46. Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Pour factoriser une expression, on cherche d'abord s'il y a un facteur commun, puis on essaye d'utiliser une égalité remarquable.

5.3.1 Avec un facteur commun

On utilise la formule de distributivité $ka + kb = k(a+b)$
On dit qu'« on met k en facteur ». k peut être un nombre, une lettre ou une expression plus complexe.

Exemple 55. $2a + 2b = 2(a + b)$

$9a + 3 = 3(3a + 1)$

$5 + 15x = 5(1 + 3x)$

$3a^2 - 5a = a(3a - 5)$

$2x(2x - 3) + (2x - 3)(x - 5) = (2x - 3)[(2x + (x - 5)] = (2x - 3)(3x - 5)$

$(x - 1)(2x - 5) - (x - 1)^2 = (x - 1)(2x - 5) - (x - 1)(x - 1) = (x - 1)[(2x - 5) - (x - 1)]$ donc $(x - 1)(2x - 5) - (x - 1)^2 = (x - 1)(2x - 5 - x + 1) = (x - 1)(x - 4)$

5.3.2 Avec une identité remarquable

On utilise les trois identités remarquables dans le sens de la factorisation :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Exemple 56. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^3$

$25x^2 - 40x + 16 = (5x - 4)^2$

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

$49x^2 + 4 - 28x = (7x - 2)^2$

$64 - 9x^2 = (8 - 3x)(8 + 3x)$

$9 + 30x + 25x^2 = (5x + 3)^2$

$9x^2 - (2x + 3)^2 = [3x - (2x + 3)][3x + (2x + 3)] = (3x - 2x - 3)(3x + 2x + 3) = (x - 3)(5x + 3)$

5.3.3 Quand le facteur commun est dissimulé

Exemple 57.
$C_1 = (x - 2)(x - 4) - (x^2 - 4)$
$C_1 = (x - 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 2)$
$C_1 = (x - 2)[(x - 4) - (x + 2)]$
$C_1 = (x - 2)(x - 4 - x - 2)]$
$C_1 = (x - 2)(-6)$
$C_1 = -6(x - 2)$

$D_1 = 49x^2 - 56x + 16 + 2(7x - 4)$
$D_1 = (7x - 4)^2 + 2(7x - 4)$
$D_1 = (7x - 4)[(7x - 4) + 2]$
$D_1 = (7x - 4)(7x - 2)$

Chapitre 6

Statistiques

6.1 Exemple-modèle et vocabulaire de base

Voici un exemple qui va être utile pour poser les bases de vocabulaire de ce chapitre. On a demandé aux 29 élèves d'une classe de 3^e combien ils avaient de frères ou de sœurs. Les réponses obtenues sont :
1 ; 4 ; 0 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 0 ; 0 ; 2 ; 5 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0.

Définition 47. Chaque réponse d'élève est appelée une donnée.

Définition 48. La liste de ces 29 données est une série statistique.

Définition 49. La population étudiée est « les élèves de cette classe de 3^e ».

Définition 50. Le caractère étudié est « le nombre de frères ou de sœurs ».

Définition 51. Les valeurs prises par ce caractère sont les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

Remarque. Il ne faut pas confondre les valeurs et les données. Il y a ici 29 données, mais seulement 6 valeurs.

6.2 Effectif et fréquence

Définition 52. L'effectif total d'une série statistique est le nombre de données dans la série.

Exemple 58. Dans l'exemple-modèle, l'effectif total est 29.

Définition 53. L'effectif d'une valeur donnée est le nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série.

Exemple 59. Dans l'exemple-modèle, l'effectif de la valeur 2 est 7.

Remarque. Pour lire plus facilement les données d'une série statistique, on peut les regrouper et les organiser dans un tableau.

Nombre de frères et de sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	11	7	3	2	1

La somme de tous les effectifs est égal à l'effectif total.

Définition 54. L'effectif cumulé croissant d'une valeur donnée est le nombre de fois où cette valeur ou une valeur inférieure apparaît dans cette série.

Exemple 60. Dans l'exemple-modèle, l'effectif cumulé croissant de la valeur 1 est 16.

Nombre de frères et de sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	11	7	3	2	1
Effectif cumulé croissant	5	16	23	26	28	29

L'effectif cumulé croissant de la valeur la plus élevée est l'effectif total.

Définition 55. La fréquence d'une valeur donnée est le quotient de l'effectif de la valeur par l'effectif total.
Une fréquence peut s'exprimer à l'aide d'une fraction, d'un pourcentage ou d'une écriture décimale.

Exemple 61. Dans l'exemple-modèle, l'effectif de la valeur 4 est 2, sur un effectif total de 29. La fréquence de la valeur 4 est donc $\frac{2}{29}$.

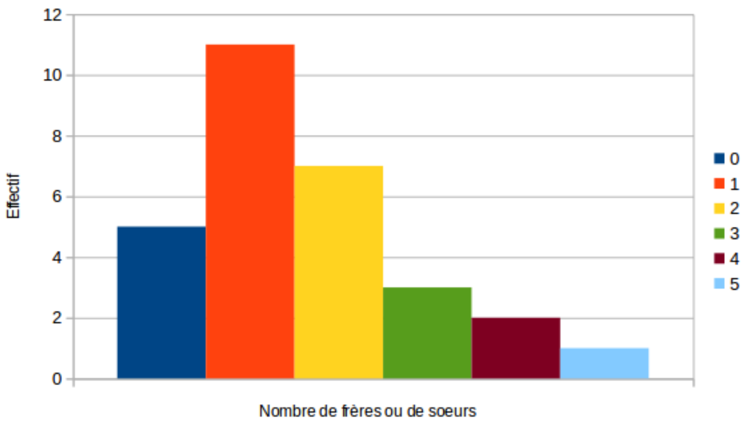
Nombre de frères et de sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	11	7	3	2	1
Fréquence	$\frac{5}{29}$	$\frac{11}{29}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{3}{29}$	$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{29}$

6.3 Représentation graphique

On peut représenter une série de données par un tableau, ou par différents types de graphiques : diagramme en barres ou en bâtons, circulaire (ou semi-circulaire), histogramme, courbe.

Propriété 56. *Dans un diagramme en bâtons, la hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif de la valeur qu'il représente.*

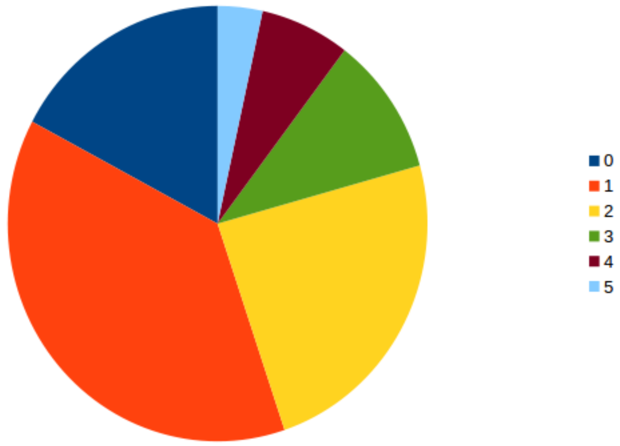
Remarque. Les bâtons sont espacés alors que les barres sont « collées ».



Propriété 57. *Dans un diagramme circulaire, la mesure de l'angle de chaque secteur est proportionnelle à l'effectif de la valeur qu'il représente.*

Exemple 62. Dans l'exemple-modèle, on calcule l'angle qui correspond à la valeur 4 : $\frac{2}{29} \times 360 \approx 25$

Nombre de frères et de sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	11	7	3	2	1
Angle en degré	62	137	87	37	25	12



Propriété 58. *Dans un histogramme, c'est l'aire de chaque rectangle qui est proportionnelle à l'effectif de la valeur qu'il représente.*

Remarque. Le terme « histogramme » est souvent employé à tort. Il s'agit le plus souvent de diagrammes en barres.

6.4 Moyenne et moyenne pondérée

Définition 56. La moyenne d'une série de données est le nombre égal à la somme des données divisée par l'effectif total de la série.

Exemple 63. Dans l'exemple-modèle, on a :

$$\frac{1+4+1+1+3+3+4+2+2+1+1+3+2+2+1+2+5+2+1+1+1+2+1+1}{29} = \frac{47}{29}$$

Chaque élève de la classe a donc, en moyenne, 1,62 frère ou sœur.

On peut également utiliser une moyenne pondérée. On multiplie alors chaque valeur par son effectif : $\dfrac{1\times 11+2\times 7+3\times 3+4\times 2+5\times 1}{29} = \dfrac{47}{29}$

Exemple 64. Au bac, un élève a obtenu les notes suivantes : 9 à l'écrit de français (coefficient 5), 12 à l'oral de français (coefficient 5), 17 au grand oral (coefficient 10), 8 en philosophie (coefficient 8), 19 à son premier enseignement de spécialité (coefficient 16), et 15 à son deuxième enseignement de spécialité (coefficient 16). En classe de première, il avait 12 de moyenne dans son troisième enseignement de spécialité (coefficient 8), qu'il n'a pas poursuivi en terminale. Ses moyennes sur les deux années étaient de 11 en histoire-géographie (coefficient 6), 15 en EMC (coefficient 2), 13 en LV1 (coefficient 6), 15 en LV2 (coefficient 6), 12 en enseignement scientifique (coefficient 6) et 17 en EPS (coefficient 6).
A-t-il une mention ?

Calcul de sa moyenne :

$$\frac{(9+12)\times 5+17\times 10+8\times 8+(19+15)\times 16+12\times 8+11\times 6+15\times 2+(13+15+12+17)\times 6}{5+5+10+8+16+16+8+6+2+6+6+6+6} = \frac{1417}{100}$$

$$\frac{1417}{40} = 14,17.$$

L'élève obtient son baccalauréat avec mention bien.

6.5 Médiane et étendue

Définition 57. Une médiane d'une série de données est une valeur telle que :
• au moins la moitié des données sont inférieures ou égales à cette médiane ;
• au moins la moitié des données sont supérieures ou égales à cette médiane.

Remarque. • Pour trouver une médiane d'une série, il faut commencer par ranger les données dans l'ordre croissant.
• La médiane d'une série est une valeur de la série si l'effectif total est impair, mais pas nécessairement si l'effectif total est pair (on fait généralement la moyenne entre deux données).

Exemple 65. Si l'effectif total est impair, comme dans l'exemple-modèle :
effectif total = 29
$29 : 2 = 14,5$ donc la médiane est la 15^{e} valeur. On peut la trouver facilement grâce au tableau des effectifs cumulés croissants. La médiane de cette série est donc égale à 1. Cela signifie que plus de la moitié des élèves ont moins d'un frère ou sœur et que la moitié de la classe a plus d'un frère ou sœur.

Exemple 66. Si l'effectif total est pair, comme par exemple la série de valeurs suivantes :
5 ; 8 ; 9 ; 14 ; 18 ; 31.
effectif total = 6
$6 : 2 = 3$ donc la médiane est située entre la 3^{e} et la 4^{e} valeur, donc entre 9 et 14. Une médiane de cette série est 11,5.

Définition 58. L'étendue d'une série statistique est la différence entre les valeurs extrêmes de la série. Pour la calculer, on soustrait la plus petite valeur de la série à la plus grande valeur.

Exemple 67. Dans l'exemple précédent, l'étendue est égale à 26 car $31 - 5 = 26$.

Exemple 68. Dans l'exemple-modèle, l'étendue est égale à 5 car $5 - 0 = 5$.

Remarque. La médiane (comme la moyenne) est une caractéristique de position alors que l'étendue est une caractéristique de dispersion de la série.

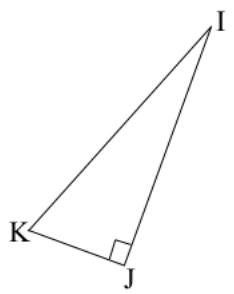
Chapitre 7

Trigonométrie

Dans tout ce chapitre, on se place dans un triangle rectangle.

7.1 Vocabulaire de base

Dans le triangle IJK rectangle en J ci-contre, on a :
$[IK]$ est l'hypoténuse.
$[IJ]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{KIJ}$.
$[KJ]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{IKJ}$.
$[IJ]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{IKJ}$.
$[KJ]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{KIJ}$.



7.2 Cosinus d'un angle aigu

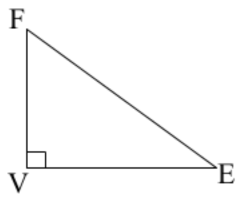
7.2.1 Définition

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est un nombre qui s'obtient comme le quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle par la longueur de l'hypoténuse.

Le cosinus de l'angle $\widehat{VFE}$ est noté $cos\ \widehat{VFE}$.

$$cos\ \widehat{VFE} = \frac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ \text{à}\ \widehat{VFE}}{longueur\ de\ l'hypoténuse}$$

$$cos\ \widehat{VFE} = \frac{VF}{FE}$$



7.2.2 Exemples

Exemple 69. Dans le triangle ABC rectangle on A, on sait que $AC = 7$ cm et $\widehat{ACB} = 32^o$. Calculer BC au mm près.

Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a :
$cos\ \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$ donc $cos\ 32 = \dfrac{7}{BC}$ donc $BC = \dfrac{7}{cos\ 32} \approx 8,3$.

$[BC]$ mesure environ 8,3 cm.

Exemple 70. Dans le triangle ABC rectangle en A, on sait que AC = 7,5 cm et BC = 9 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ arrondie au degré près.

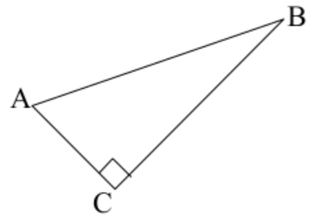
Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a :
$cos\ \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$ donc $cos\ \widehat{ACB} = \dfrac{7,5}{9}$.
A la calculatrice, on obtient $\widehat{ACB} \approx 34^o$.

7.3 Sinus d'un angle aigu

7.3.1 Définition

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est un nombre qui s'obtient comme le quotient de la longueur du côté opposé à l'angle par la longueur de l'hypoténuse.

Le sinus de l'angle $\widehat{CAB}$ est noté $sin\ \widehat{CAB}$.



$$sin\ \widehat{CAB} = \frac{longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ \widehat{CAB}}{longueur\ de\ l'hypoténuse}$$

$$sin\ \widehat{CAB} = \frac{CB}{AB}$$

7.3.2 Exemples

Exemple 71. Dans le triangle ABC rectangle en B, on sait que $\widehat{BAC} = 38^o$ et AC = 5,7 cm. Calculer une valeur arrondie au mm de BC.

Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :
$sin\ \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ donc $sin\ 38 = \dfrac{BC}{5,7}$ donc $BC = 5,7 \times sin\ 38 \approx 3,5$.

[BC] mesure environ 3,5 cm.

Exemple 72. Dans le triangle ABC rectangle en B, on sait que AB = 8,1 cm et AC = 10 cm. Calculer une valeur arrondie au degré de $\widehat{BCA}$.

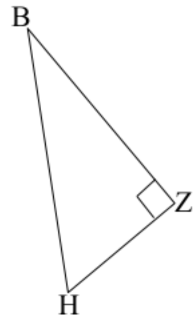
Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :
$sin\ \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC}$ donc $sin\ \widehat{BCA} = \dfrac{8,1}{10}$.
A la calculatrice, on obtient $\widehat{BCA} \approx 54^o$.

7.4 Tangente d'un angle aigu

7.4.1 Définition

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est un nombre qui s'obtient comme le quotient de la longueur du côté opposé à l'angle par la longueur du côté adjacent à l'angle.

La tangente de l'angle $\widehat{BHZ}$ est noté $tan\ \widehat{BHZ}$.



$$tan\ \widehat{BHZ} = \frac{longueur\ du\ \text{côté}\ \text{opposé}\ \text{à}\ \widehat{BHZ}}{longueur\ du\ \text{côté}\ adjacent\ \text{à}\ \widehat{BHZ}}$$
$$tan\ \widehat{BHZ} = \frac{BZ}{HZ}$$

7.4.2 Exemples

Exemple 73. Dans le triangle ABC rectangle en C, on sait que $AC = 4$ cm et $\widehat{CAB} = 55^o$. Calculer une valeur approchée au mm de CB.

Dans le triangle ABC, rectangle en C, on a :
$tan\ \widehat{CAB} = \dfrac{CB}{CA}$ donc $tan\ 55 = \dfrac{CB}{4}$ donc $CB = 4 \times tan\ 55 \approx 5,7$.

$[CB]$ mesure environ 5,7 cm.

Exemple 74. Dans le triangle ABC rectangle en C, on sait que $BC = 6$ cm et $AC = 5$ cm. Calculer une valeur approchée au degrés près de $\widehat{CBA}$.

Dans le triangle ABC, rectangle en C, on a :
$tan\ \widehat{CBA} = \dfrac{CA}{CB}$ donc $tan\ \widehat{CBA} = \dfrac{5}{6}$.
A la calculatrice, on obtient $\widehat{CBA} \approx 40^o$.

7.5 Lequel choisir ?

Pour retenir les trois formules « facilement » : SOHCAHTOA, avec S pour sinus, C pour cosinus, T pour tangente, O pour longueur du côté opposé, A pour longueur du côté adjacent, et H pour longueur de l'hypoténuse.

Dans un exercice où il faut chercher une grandeur dans un triangle rectangle, il faut toujours se poser ces questions :
quel est l'angle qui nous intéresse (soit qu'on connaît déjà, soit qu'on cherche) ?
par rapport à cet angle, que sont les deux longueurs qu'on connaît ou qu'on cherche ? Coté adjacent, côté opposé, hypoténuse ?

Si ce qui intervient est un angle, son côté opposé et l'hypoténuse : on utilise le sinus.

Si ce qui intervient est un angle, son côté adjacent et l'hypoténuse : on utilise le cosinus.

Si ce qui intervient est un angle, son côté opposé et son côté adjacent : on utilise la tangente.

7.6 Propriétés

7.6.1 Encadrement de sinus et cosinus

Propriété 59. *Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont toujours positifs et inférieurs à 1.*

Démonstration :
Dans un triangle rectangle, le plus grand côté est l'hypoténuse.

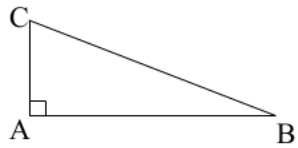
Remarque. Un formulation plus mathématique serait :
Quelque soit l'angle α strictement compris entre 0^o et 90^o, $0 < sin\ \alpha < 1$ et $0 < cos\ \alpha < 1$.

7.6.2 Relation entre tangente, sinus et cosinus

Propriété 60. *Quelque soit l'angle α strictement compris entre 0^o et 90^o, $tan\ \alpha = \dfrac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$.*

Démonstration :

On considère un triangle ABC rectangle en A.



sin $\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$ et $cos\ \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$

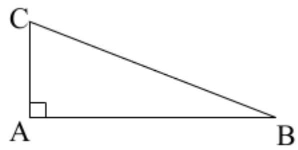
$$\frac{sin\ \widehat{ACB}}{cos\ \widehat{ACB}} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} = tan\ \widehat{ACB}$$

7.6.3 Lien avec le théorème de Pythagore

Propriété 61. *Quelque soit l'angle α strictement compris entre 0^o et 90^o, $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$.*

Démonstration :

On considère un triangle ABC rectangle en A.



sin $\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$ et $cos\ \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$

$$\left(sin\ \widehat{ACB}\right)^2 + \left(cos\ \widehat{ACB}\right)^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

Or, comme le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$. Donc $\left(sin\ \widehat{ACB}\right)^2 + \left(cos\ \widehat{ACB}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$.

Remarque. On note $(sin\ \alpha)^2 = sin^2\ \alpha$ et $(cos\ \alpha)^2 = cos^2\ \alpha$.

7.7 Valeurs remarquables

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas

Chapitre 8

Équations

Résoudre une équation, c'est trouver la (ou les) valeurs de l'inconnue (souvent notée x) pour laquelle l'égalité est vraie.

8.1 Equation du premier degré à une inconnue

8.1.1 Deux équations de référence

Propriété 62. *Soient a, b, c et d quatre nombres quelconques avec $c \neq 0$.*
L'équation $a + x = b$ (d'inconnue x) a pour solution $x = b - a$.
L'équation $cx = d$ (d'inconnue x) a pour solution $x = d : c$.

Démonstration :
On ne change pas une égalité en additionnant ou en multipliant chaque membre de l'égalité par un même nombre. Ainsi, si $a + x = b$, on peut soustraire a de chaque côté de l'égalité : $a + x - a = b - a$ ce qui donne bien $x = b - a$.
De même, si $cx = d$, on divise par c de chaque côté : $\frac{cx}{c} = \frac{d}{c}$. En simplifiant par c dans le membre de gauche, on a bien : $x = d : c$.

8.1.2 Exemples

Exemple 75. Résoudre $2x - 8 = -7x + 2$

On ajoute $7x$ et 8 de chaque côté : $2x + 7x = 2 + 8$
On réduit : $9x = 10$
On divise par 9 : $x = \frac{10}{9}$. L'équation a donc une solution : $\frac{10}{9}$.

Exemple 76. Résoudre $4(x + 7) - 2x = 3(x + 8) - 9(1 - 2x)$

On développe : $4x + 28 - 2x = 3x + 24 - 9 + 18x$
On réduit : $2x + 28 = 21x + 15$
On ôte 15 et $2x$ de chaque côté : $28 - 15 = 21x - 2x$
On réduit : $13 = 19x$
On divise par 19 : $x = \frac{13}{19}$

Exemple 77. Résoudre $4 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + 1$

$4 - 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x$

$3 = -\frac{4}{6}x + \frac{3}{6}x$

$3 = -\frac{1}{6}x$

$x = 3 : \left(-\frac{1}{6}\right)$

$x = \frac{3 \times 6}{-1}$

$x = -18$

L'équation a donc une seule solution, $x = -18$.

8.1.3 Deux cas particuliers

Exemple 78. Résoudre $4x + 5 = 6 - 4(1 - x)$

$4x + 5 = 6 - 4 + 4x$
$4x - 4x = 2 - 5$
$0 = -3$

Cette égalité est toujours fausse, l'équation n'a donc pas de solution.

Exemple 79. Résoudre $2x + 3 = 3(x - 2) - x + 9$

$2x + 3 = 3x - 6 - x + 9$
$2x - 3x + x = -6 + 9 - 3$
$0 = 0$

Cette égalité est toujours vraie. Tout nombre est donc solution de l'équation.

8.1.4 Mise en équation d'un problème

Exemple 80. Trouver cinq nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 1515.

Choix de l'inconnue : On appelle x le plus petit des cinq nombres cherchés.

Traduction de l'énoncé et mise en équation du problème : $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 1515$

Résolution de l'équation :
$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 1515$
$5x + 10 = 1515$
$5x = 1505$
$x = 1505 : 5$
$x = 301$

Conclusion (retour au problème posé) :
Les cinq nombres cherchés sont 301 ; 302 ; 303 ; 304 et 305.

8.2 Equation-produit nulle

8.2.1 Propriété

Propriété 63. *Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul.*

Démonstration :
Soient a et b deux nombres :
Si $a = 0$ ou si $b = 0$, alors $a \times b = 0$
Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

8.2.2 Applications

Exemple 81. Résoudre $(2x + 1)(x - 4) = 0$

$2x + 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$
$2x = -1$ ou $x = 4$
$x = \dfrac{-1}{2}$ ou $x = 4$
L'équation a deux solutions $\dfrac{-1}{2}$ et 4.

Exemple 82. Résoudre $2x(x + 7) = 0$

$2x = 0$ ou $x + 7 = 0$
$x = 0$ ou $x = -7$
L'équation a deux solutions : 0 et -7.

Exemple 83. Résoudre $4(2 - x) - (x + 1)(2 - x) = 0$

$(2 - x)[4 - (x + 1)] = 0$
$(2 - x)(4 - x - 1) = 0$
$(2 - x)(3 - x) = 0$
$2 - x = 0$ ou $3 - x = 0$
$x = 2$ ou $x = 3$
L'équation a deux solutions 2 et 3.

Exemple 84. Résoudre $9x^2 - 4 = 0$

$(3x - 2)(3x + 2) = 0$
$3x - 2 = 0$ ou $3x + 2 = 0$
$3x = 2$ ou $3x = -2$
$x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = \dfrac{-2}{3}$
L'équation a deux solutions $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{-2}{3}$.

8.2.3 Equations du type $x^2 = a$

Exemple 85. Résoudre $x^2 = 16$.

L'équation a deux solutions 4 et -4.

Exemple 86. Résoudre $x^2 = 15$.

L'équation a deux solutions $\sqrt{15}$ et $-\sqrt{15}$.

Exemple 87. Résoudre $x^2 = a$ avec $a > 0$.

L'équation a deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple 88. Résoudre $x^2 = 0$.

L'équation a une solution unique, 0.

Exemple 89. Résoudre $x^2 = a$ avec $a < 0$.

Un carré ne peut pas être négatif, donc l'équation n'a pas de solution.

Exemple 90. Résoudre $4x^2 = 25$

$4x^2 - 25 = 0$
$(2x - 5)(2x + 5) = 0$
$2x - 5 = 0$ ou $2x + 5 = 0$
$2x = 5$ ou $2x = -5$
$x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$
L'équation a deux solutions $\frac{5}{2}$ et $-\frac{5}{2}$.

Chapitre 9

Fonctions, lien avec la proportionnalité

9.1 Définitions et rappels

9.1.1 Fonction linéaire

Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Par exemple, le tableau

3	5	-1	8
21	35	-7	56

est un tableau de proportionnalité, dont le coefficient de proportionnalité vaut 7.
On peut ainsi dire que les nombres de la deuxième ligne sont les images des nombres de la première ligne par la fonction qui, à x, associe $7x$.
C'est donc un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 7x$.

De manière générale, une fonction linéaire a une expression algébrique de la forme $x \mapsto ax$, avec a un nombre quelconque.

9.1.2 Fonction affine

Une fonction affine traduit une situation où les accroissements sont proportionnels. Par exemple, étudions le tableau de valeurs suivants :

	A	B	C	D	E	F
x	0	2	3	-1	5	-2
y	3	11	15	-1	23	-5

Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité. Mais si on regarde le tableau des accroissements :

Ce tableau-là est un tableau de proportionnalité.

Dans ce cas, on dit que les accroissements sont proportionnels, et le tableau est un tableau de valeurs d'une fonction dite affine, de la forme $x \mapsto ax + b$, avec a et b deux nombres quelconques.

Remarque : a est alors le coefficient de proportionnalité du tableau des accroissements et b est l'image de zéro.

Le tableau initial est donc un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 4x + 3$.

9.1.3 Calcul d'image

Exemple 91. On considère la fonction linéaire $f : x \mapsto 4x$.
Déterminer les images de -2 et de 6 par la fonction f.
$f(-2) = 4 \times (-2) = -8$
$f(6) = 4 \times 6 = 24$
-2 et 6 ont pour images respectivement -8 et 24 par la fonction f.

Exemple 92. Soit la fonction $g : x \mapsto -2x + 9$.
Déterminer les images de -3, $\frac{1}{3}$ et 5 par la fonction g.
$g(-3) = -2 \times (-3) + 9 = 6 + 9 = 15$
$g\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \times \frac{1}{3} + 9 = \frac{-2}{3} + \frac{27}{3} = \frac{25}{3}$
$g(5) = -2 \times 5 + 9 = -10 + 9 = -1$
-3, $\frac{1}{3}$ et 5 ont pour images respectivement 15, $\frac{25}{3}$ et -1 par la fonction g.

9.1.4 Calcul d'antécédent

Exemple 93. Soit la fonction linéaire $h : x \mapsto -12x$.
Déterminer les antécédents de 20 et de -48 par h.

- On cherche x tel que $h(x) = 20$ soit $-12x = 20$ ce qui donne $x = \frac{20}{-12} = -\frac{5}{3}$.
- On cherche x tel que $h(x) = -48$ soit $-12x = -48$ ce qui donne $x = -48 : (-12) = 4$.

Les antécédents de 20 et de -48 par la fonction h sont respectivement $-\frac{5}{3}$ et 4.

Exemple 94. Soit la fonction affine $i : x \mapsto 12x + 1$.
Déterminer les antécédents de 25 et de -35 par la fonction i.

•$i(x) = 25$	•$i(x) = -35$
$12x + 1 = 25$	$12x + 1 = -35$
$12x = 24$	$12x = -36$
$x = 2$	$x = -3$

Les antécédents de 25 et de -35 par la fonction i sont respectivement 2 et -3.

9.2 Représentation graphique

9.2.1 Fonction linéaire

Une fonction linéaire est la traduction d'une situation de proportionnalité donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

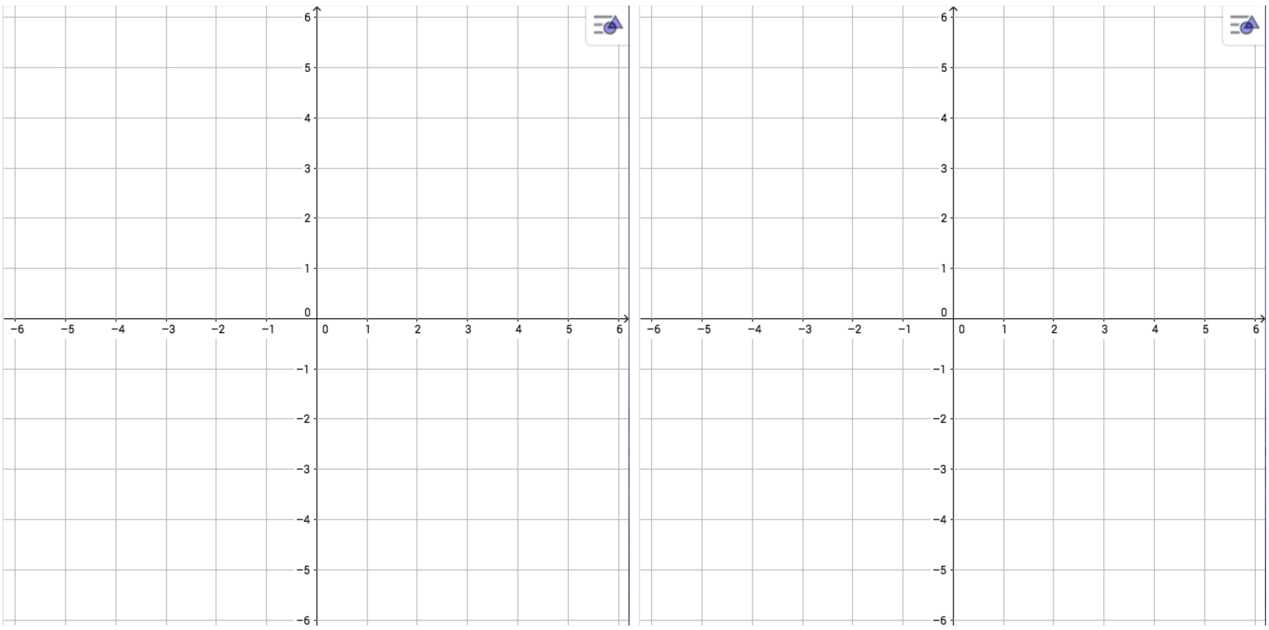
On connaît donc déjà un point appartenant à cette droite, c'est le point O $(0\,;\,0)$.
Il nous faut donc trouver un deuxième point appartenant à la représentation graphique de la fonction.
Considérons la fonction $f : x \mapsto ax$.
On a : $f(x) = ax$ et $f(x+1) = a(x+1) = ax + a = f(x) + a$
Ainsi si on augmente x (l'abscisse) de 1, alors $f(x)$ (l'ordonnée) augmente de a.

Pour trouver un deuxième point appartenant à la représentation graphique de la fonction, on peut donc partir du point O, augmenter l'abscisse de 1 et l'ordonnée de a. Le point A de coordonnées $(1\,;\,a)$ appartient donc aussi à la représentation graphique de f.

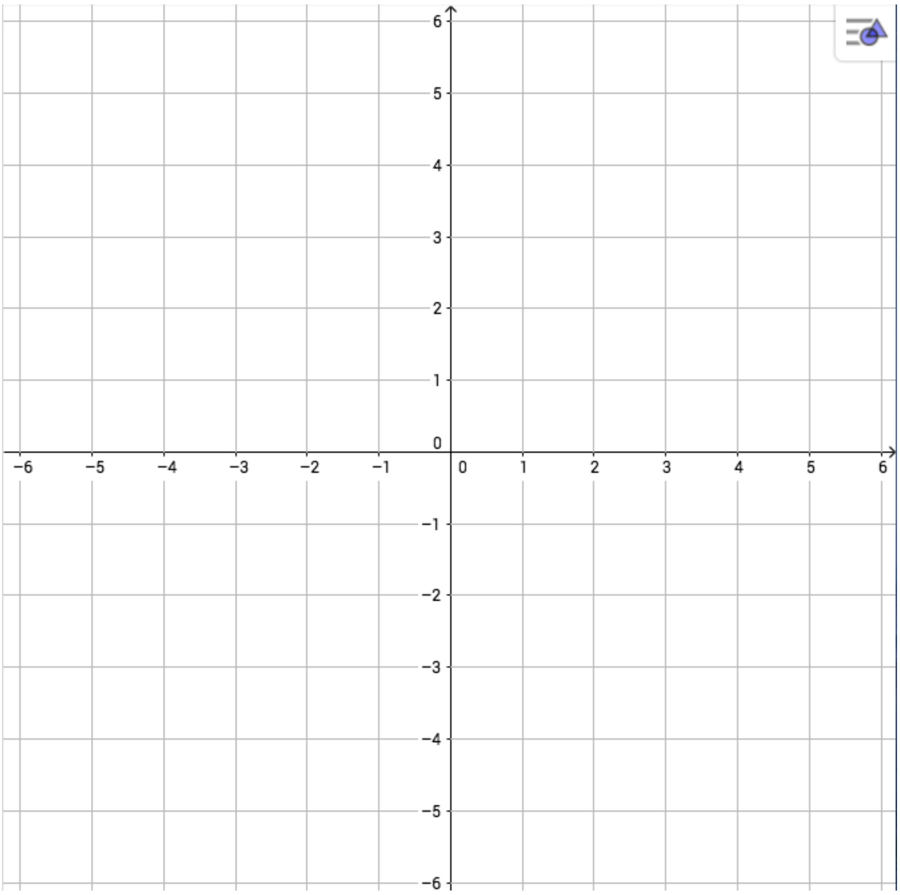
Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la fonction.

Exemple 95. Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto -2x$.

Exemple 96. Représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto 5x$.



Exemple 97. Représenter graphiquement la fonction $h : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x$.



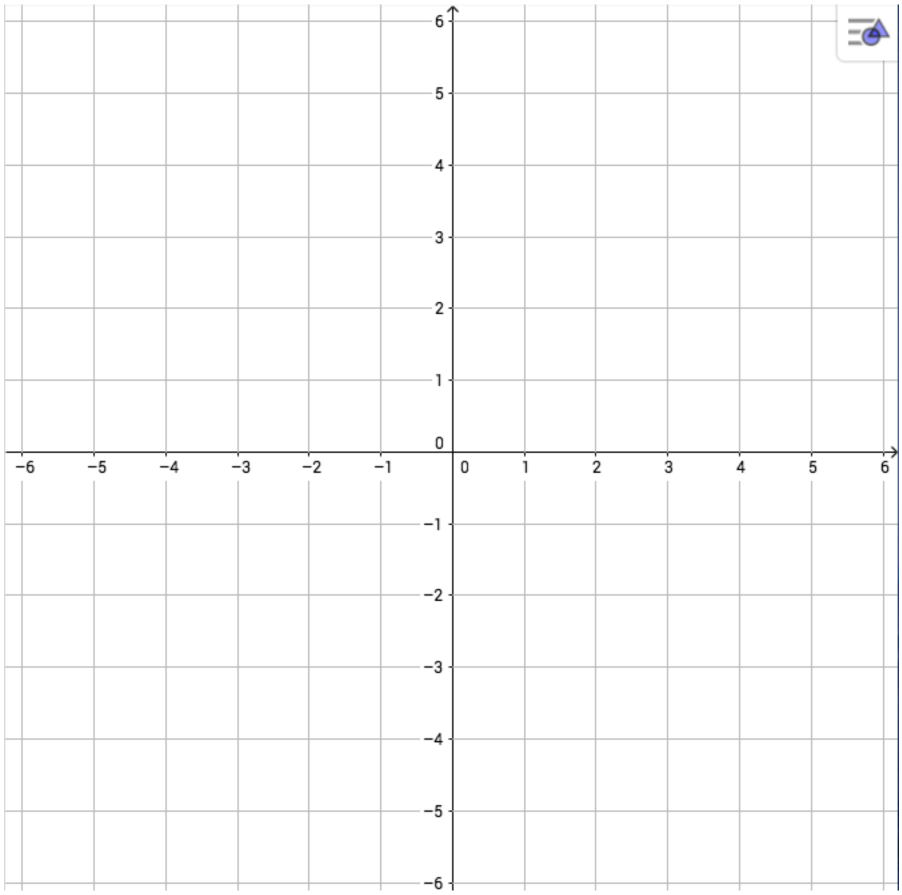
9.2.2 Fonction affine

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Pour la tracer, il faut donc trouver deux points appartenant à cette droite.

Première méthode : on calcule les coordonnées de deux points appartenant à cette droite
On choisit deux valeurs de x (abscisses) et on calcule les valeurs de y (ordonnées) correspondantes en utilisant $y = f(x)$.

Exemple 98. Représenter graphiquement la fonction $i : x \mapsto 3x - 2$.
On choisit deux valeurs de x et on calcule les ordonnées y correspondantes avec $y = i(x) = 3x - 2$.

x		
y		



Remarque. Chaque élève peut choisir des valeurs de x différentes, et donc avoir des points A et B différents, mais chaque élève obtiendra la même droite au final.

Deuxième méthode : sans calcul

L'expression générale d'une fonction affine est du type $f(x) = ax + b$.

• $f(0) = a \times 0 + b = b$, donc b est l'image de 0 par la fonction f. Cela signifie que le point $A(0; b)$ appartient à la représentation graphique de f.

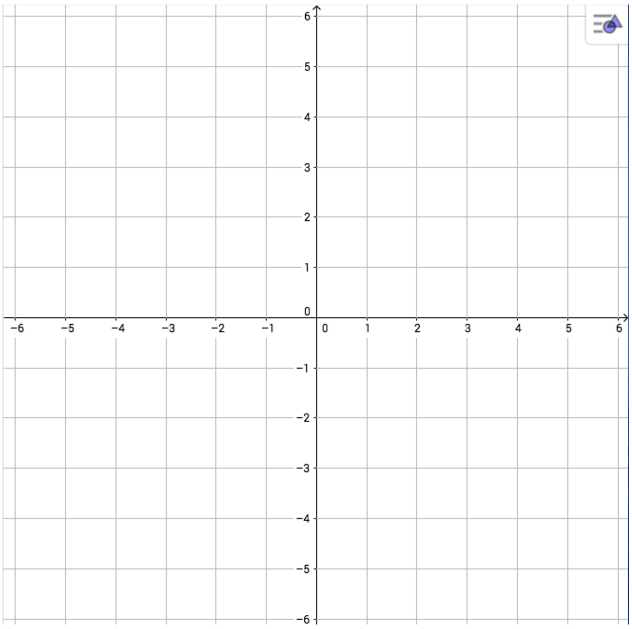
On dit que b est « l'ordonnée à l'origine » de la fonction f.

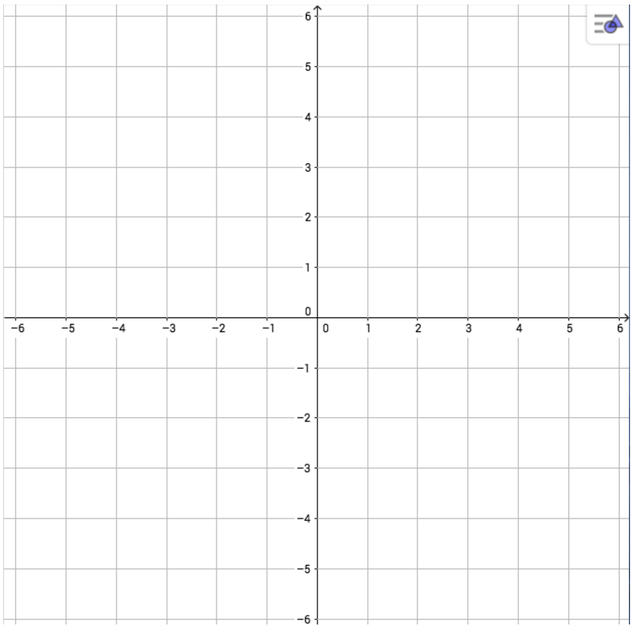
• $f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b = ax + b + a = f(x) + a$, donc quand on augmente x de 1, $f(x)$ augmente de a. A partir du point A obtenu précédemment on augmente l'abscisse de 1 et l'ordonnée de a pour obtenir un deuxième point appartenant à la représentation graphique de f.

On dit a est « le coefficient directeur » de la fonction f. Il donne une indication sur la pente (direction) de la droite.

Exemple 99. Représenter graphiquement la fonction $j : x \mapsto -3x + 2$

Exemple 100. Représenter graphiquement la fonction $k : x \mapsto 2x + \dfrac{1}{2}$



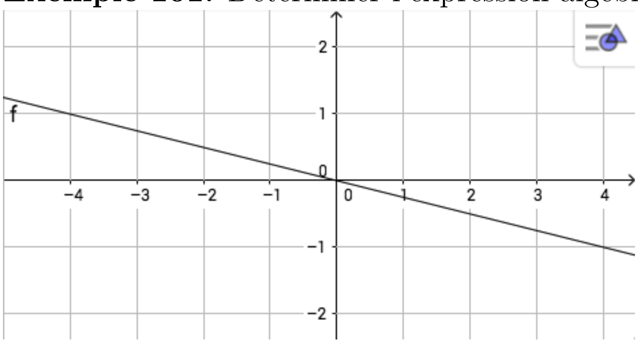


9.3 Détermination d'une expression algébrique

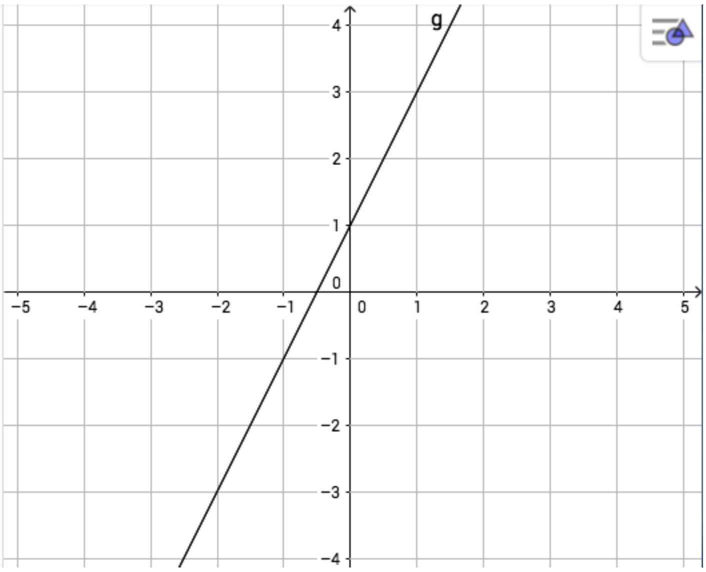
9.3.1 Graphiquement

On cherche les valeurs de a et de b telles que $f(x) = ax + b$. On reprend la méthode précédente « à l'envers ». b est l'ordonnée à l'origine, donc on lit l'ordonnée du point d'abscisse zéro appartenant à la droite. a est le coefficient directeur, donc on part d'un point de la droite, on augmente l'abscisse de 1 et on lit de combien a augmenté ou diminué l'ordonnée pour revenir sur la droite.

Exemple 101. Déterminer l'expression algébrique de la fonction f représentée ci-dessous.



Exemple 102. Déterminer l'expression algébrique de la fonction g représentée ci-dessous.



9.3.2 A l'aide deux nombres et de leurs images

On suppose que la représentation graphique d'une fonction affine f passe par les points $M(x_M;y_M)$ et $N(x_N;y_N)$.
On cherche l'expression algébrique de la fonction f.
f étant affine, on a : $f(x)=ax+b$. On cherche a et b.

M et N appartiennent à la représentation graphique de f donc $y_M=f(x_M)=ax_M+b$ et $y_N=f(x_N)=ax_N+b$

Donc $y_M-y_N=a(x_M-x_N)$ donc $a=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}$

On trouve ensuite b en utilisant le fait que M (ou N) appartient à la représentation graphique de f et on résout une équation.

Exemple 103. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points $A(-1;5)$ et $B(3;11)$.
Énoncé équivalent : Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que $f(-1)=5$ et $f(3)=11$.

f est une fonction affine donc $f(x)=ax+b$.
$a=\dfrac{11-5}{3-(-1)}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$
$A\in\mathscr{C}_f$ donc $5=f(-1)=\dfrac{3}{2}\times(-1)+b=\dfrac{-3}{2}+b$ dont $b=5+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$.
Ainsi, $f(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}$.

Exemple 104. Déterminer l'expression algébrique de la fonction linéaire g dont la représentation graphique passe par le point $C(5;-15)$.

g est une fonction linéaire donc $g(x)=ax$.
$a=-15:5=-3$ donc $g(x)=-3x$.

Chapitre 10

Arithmétique

10.1 Multiples et diviseurs, nombres premiers

10.1.1 Définitions

Définition 59. Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

Remarque. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Exemple 105. 0 ; 2 ; 153 sont des entiers naturels. -5 n'est pas un entier naturel (mais un entier relatif).

Définition 60. Soient deux entiers naturels a et b.
On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier naturel k tel que $a = b \times k$.

On dit aussi que « b est un diviseur de a » ou que « b divise a ».

Exemple 106. 12 est un multiple de 3.
4 est un diviseur de 12.

Remarque. Comme pour tout nombre entier n, on a $n = n \times 1$, tout nombre est multiple de 1, et tout nombre est multiple de lui-même.
0 ne divise personne !

Définition 61. Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 107. Les dix premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29.

Remarque. 1 n'est pas un nombre premier, car il n'a qu'un seul diviseur.

10.1.2 Critères de divisibilité

Propriété 64. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 2 s'il est pair, ie s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

Démonstration :

n est divisible par 2 signifie que $n = 2p$ avec p entier naturel, donc n est bien un nombre pair.

Propriété 65. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 3.

Démonstration :
On suppose que n est un nombre composé de 5 chiffres. La démonstration est analogue pour un nombre différent de chiffres.
On peut donc écrire : $n = a \times 10000 + b \times 1000 + c \times 100 + d \times 10 + e$ avec a, b, c, d et e cinq chiffres.
$n = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$
$n = 9999a + a + 999b + b + 99c + c + 9d + d + e$
$n = a + b + c + d + e + 3(3333a + 333b + 33c + 3d)$
Or $3(3333a + 333b + 33c + 3d)$ est divisible par 3 donc n est divisible par 3 si et seulement si $a + b + c + d + e$ est divisible par 3.

Propriété 66. *Soit n un entier naturel supérieur à 100.*
n est divisible par 4 si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Démonstration :
n est supérieur à 100 donc on peut écrire $n = a \times 100 + b \times 10 + c$ avec a un nombre entier et b et c deux chiffres.
$n = 100a + 10b + c = 4 \times 25a + 10b + c$.
Or $4 \times 25a$ est divisible par 4 donc n est divisible par 4 si et seulement si $10b + c$ est divisible par 4.

Remarque. Pour les nombres plus petits que 100, on peut décomposer avec des multiples de 4. Par exemple, $86 = 40 + 40 + 6$ et 6 n'est pas divisible par 4 donc 86 n'est pas divisible par 4. En revanche, $92 = 40 + 40 + 12$ donc 92 est divisible par 4.

Propriété 67. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Propriété 68. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 6 s'il est pair et si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Démonstration :
Un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et par 3.

Propriété 69. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Démonstration :
analogue au critère de divisibilité par 3

Propriété 70. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Démonstration :
n est divisible par 10 donc $n = 10p$ avec p entier naturel. Le chiffre des unités de n est donc bien 0.

10.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

10.2.1 DPFP

Propriété 71. *(admise) Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre près.*

Remarque. On note parfois DPFP la Décomposition en Produit de Facteurs Premiers.

Exemple 108. Pour trouver la DPFP d'un entier, on commence par utiliser les critères de divisibilité. On vérifie si le nombre est divisible par 2, éventuellement plusieurs fois, puis par 3, par 5, etc. On utilise la notation avec les exposants si le même nombre est plusieurs fois un diviseur.
$924 = 2 \times 462 = 2 \times 2 \times 231 = 2^2 \times 3 \times 77 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$

10.2.2 Applications

Définition 62. Une fraction est dite irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur ont pour seul diviseur commun 1.

Remarque. Cela signifie qu'une fraction irréductible ne peut plus être simplifiée.

Définition 63. On note PGCD le plus grand diviseur commun à deux entiers.

Exemple 109. Liste des diviseurs de 26 : 1 ; 2 ; 13 ; 26
Liste des diviseurs de 65 : 1 ; 5 ; 13 ; 65.
Donc le PGCD de 26 et de 65 est 13. On note PGCD(26 ; 65)=13.

Remarque. Pour obtenir une fraction irréductible, il suffit donc de la simplifier par le PGCD du numérateur et du dénominateur.

Remarque. Il existe plusieurs méthodes pour trouver le PGCD de deux entiers : l'algorithme des soustractions successives, l'algorithme d'Euclide (aussi appelé l'algorithme des divisions euclidiennes), et la méthode qui utilise la DPFP. L'exemple suivant utilise la DPFP.

Exemple 110. Rendre irréductible la fraction $\dfrac{224}{280}$.
On commence par trouver les DPFP des deux nombres :
$224 = 2 \times 112 = 2^2 \times 56 = 2^3 \times 28 = 2^4 \times 14 = 2^5 \times 7$
$280 = 2 \times 140 = 2^2 \times 70 = 2^3 \times 35 = 2^3 \times 5 \times 7$ Le PGCD des deux nombres est donc $2^3 \times 7 = 56$.
Pour rendre irréductible $\dfrac{224}{280}$, il suffit donc de simplifier la fraction par 56 :
$\dfrac{224}{280} = \dfrac{224 : 56}{280 : 56} = \dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{4}{5}$ est irréductible.

Définition 64. On note PPCM le plus petit multiple commun à deux entiers.

Remarque. C'est une notion qui est utilisée depuis l'apprentissage de l'addition des fractions. Par exemple, pour additionner $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$, on cherche un nombre qui soit « dans la table de 2 et de 3 », ie un multiple commun à 2 et à 3, et le plus petit possible pour garder les calculs les plus simples possibles. C'est donc bien le PPCM des deux dénominateurs que l'on cherche.

Exemple 111. Déterminer le PPCM de 21 et 28.
$21 = 3 \times 7$
$28 = 2^2 \times 7$ donc $PPCM(21; 28) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$

Chapitre 11

Probabilités

11.1 Vocabulaire et exemples

11.1.1 Expérience aléatoire

Définition 65. Une expérience est dite aléatoire lorsque son résultat est déterminé par le hasard (en latin : alea) et ne peut donc pas être prévu à l'avance avec certitude.
Une fois l'expérience réalisée, on obtient un « résultat » ou une « issue ».

Exemple 112. Un lancer de dé, tirer une carte au hasard dans un jeu de cartes, tirer une boule dans une urne sont des expériences aléatoires.

11.1.2 Événement, événement élémentaire

Définition 66. Un événement est un ensemble de résultats.

Définition 67. Un événement élémentaire est un événement constitué d'un seul résultat.

Exemple 113. On lance un dé à 6 faces. Les résultats possibles sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. Un événement élémentaire est par exemple « obtenir un 3 ». « Obtenir un nombre pair », « obtenir un nombre plus petit que 5 » sont des événements .

11.1.3 Probabilité d'un événement

Définition 68. Quand une expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un événement élémentaire se rapproche d'une valeur particulière : la probabilité de cet événement élémentaire.

Exemple 114. On lance un dé à 6 faces. La fréquence d'apparition du chiffre 5 est la probabilité de l'événement « obtenir un 5 » et elle est égale à $\frac{1}{6}$.

Définition 69. La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
On note $p(A)$ la probabilité de l'événement A.

Propriété 72. *(admise) Avec un arbre, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités écrites sur les branches conduisant aux issues qui réalisent l'événement.*

Propriété 73. *(admise) Si A est un événement, alors $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.*

11.1.4 Événement certain

Définition 70. On appelle événement certain un événement réalisé quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.

Propriété 74. *La probabilité de l'événement certain est 1.*

Exemple 115. On lance un dé à 6 faces. « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 » est un événement certain.

11.1.5 Événement impossible

Définition 71. On appelle événement impossible un événement qui ne sera jamais réalisé.

Propriété 75. *La probabilité de l'événement impossible est 0.*

Exemple 116. On lance un dé à 6 faces. « Obtenir un nombre supérieur à 7 » est un événement impossible.

11.1.6 Événements incompatibles

Définition 72. Deux événements A et B sont incompatibles quand ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Propriété 76. *Lorsque deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités :* $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$.

Exemple 117. On tire une boule au hasard dans une urne contenant des boules rouges et des boules jaunes. L'événement « obtenir une boule rouge » est incompatible avec l'événement « obtenir une boule jaune ».

11.1.7 Événements contraires

Définition 73. L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note « non$A$ ».

Propriété 77. *Si A est un événement, alors A et non A sont incompatibles.*

Propriété 78. *La somme des probabilités d'un événement A et de son contraire est 1 :*
$p(A) + p(nonA) = 1$.

Exemple 118. On lance un dé à 6 faces. Si A est l'événement « obtenir un nombre pair », alors non A est « obtenir un nombre impair ».

11.2 Exercices de base

11.2.1 Exercice 1

1. Déterminer la probabilité de tirer un as dans un jeu de 32 cartes.
2. Déterminer la probabilité de tirer un trèfle dans un jeu de 32 cartes.
3. Les événements « tirer un as » et « tirer un trèfle » sont-ils incompatibles ?
4. Déterminer la probabilité de tirer un as ou un trèfle dans un jeu de 32 cartes.

11.2.2 Exercice 2

Un dé a la forme d'un icosaèdre régulier. Les vingt faces sont numérotées de 1 à 20 et on admet que l'on a autant de chances d'obtenir chacune des faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 2 ? Un multiple de 3 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre qui ne soit ni un multiple de 2 ni un multiple de 3 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier ?

11.2.3 Exercice 3

Dans une urne, il y a cinq boules rouges (R), deux boules bleues (B) et une boule verte (V), indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules. Déterminer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

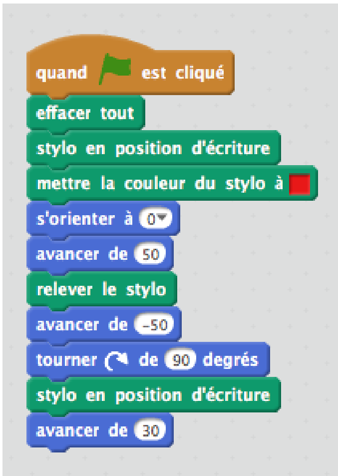
A retenir :
La probabilité d'un résultat d'un expérience à deux épreuves est égale au produit des probabilités figurant sur la branche conduisant à ce résultat.

Chapitre 12

Algorithmique

12.1 Structure générale d'un programme

Voici un exemple de petit programme. Il permet d'afficher la lettre L en rouge.



12.2 Boucle

Une boucle permet d'éviter de répéter plusieurs fois la même instruction. On se limitera aux boucles du type « répéter [n] fois ». Cette instruction se trouve dans le menu « Contrôle »de Scratch.

Par exemple, pour tracer un carré, on préférera un programme de 8 lignes (Figure 12.1) plutôt qu'un programme de 13 lignes (Figure 12.2).

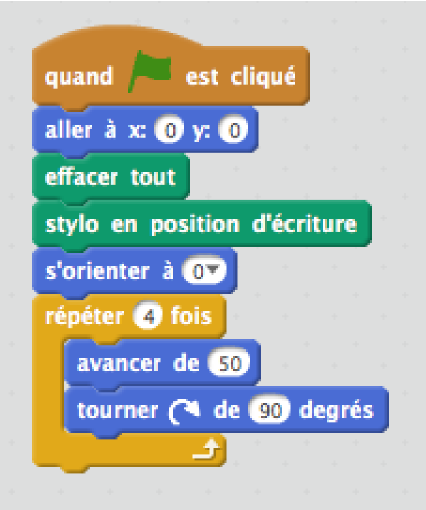


FIGURE 12.1 – Tracé d'un carré avec boucle

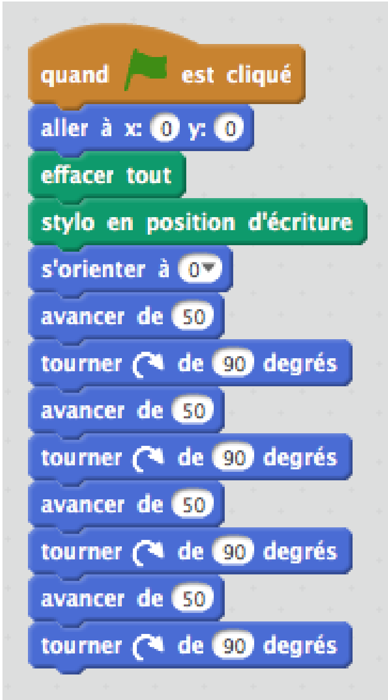
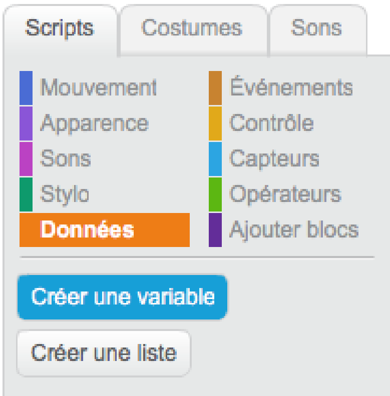
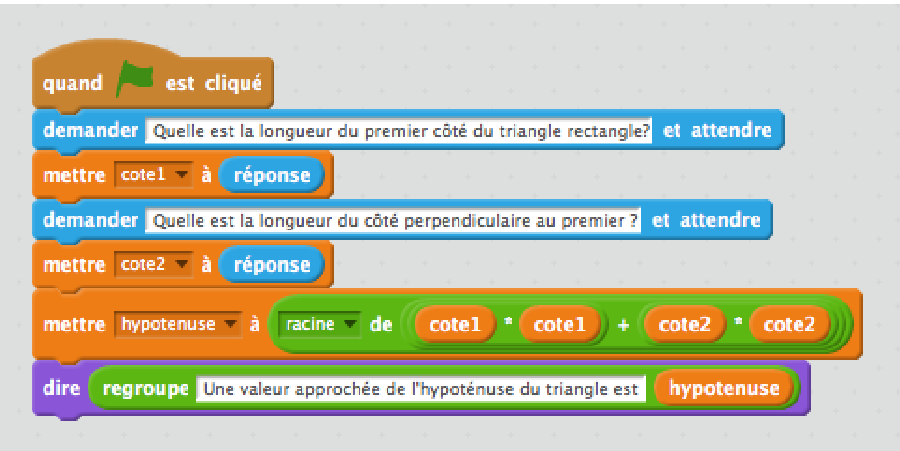


FIGURE 12.2 – Tracé d'un carré sans boucle

12.3 Variable

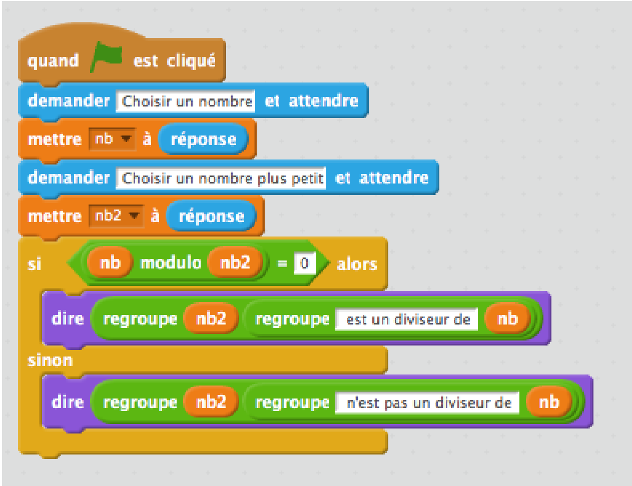
En programmation, une variable est un espace de stockage pour un résultat. Elle permet d'associer un nom à une valeur.
Une variable peut par exemple servir à comptabiliser le score dans un jeu. On utilise le menu « Données ».





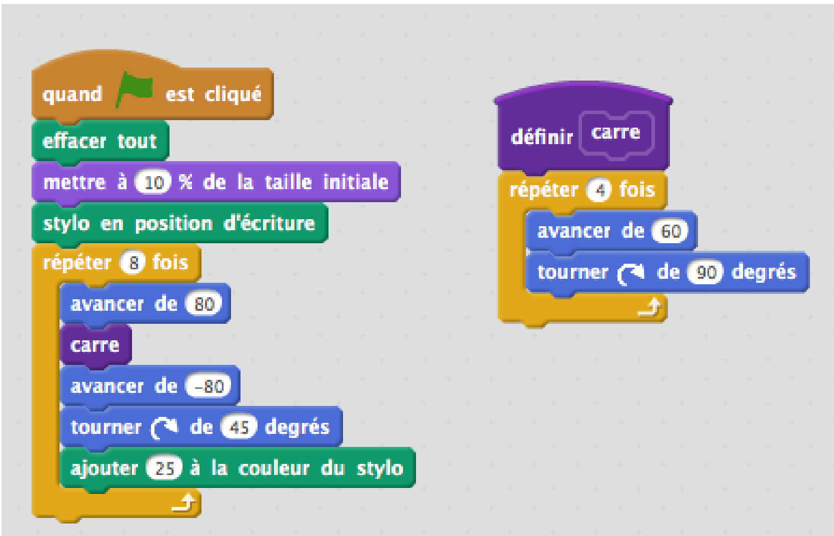
12.4 Condition

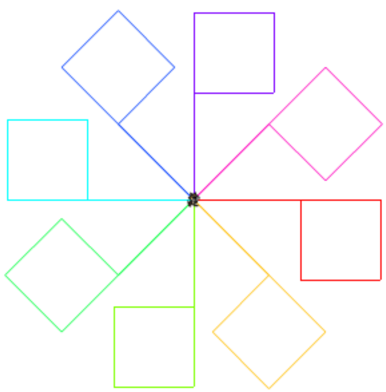
Les instructions conditionnelles peuvent être de la forme « Si … alors … » ou plus complexe : « Si … alors … ; sinon … ». On les trouve dans le menu « Contrôle ».



12.5 Sous-programme

On peut créer un sous-programme (éventuellement paramétré), appelé « Bloc » dans Scratch, quand un groupement d'instruction est répété dans un programme.





Chapitre 13

Racines carrées

Attention, ce chapitre ne fait pas partie du programme de troisième, c'est un chapitre « bonus ».

13.1 Définition

13.1.1 Rappels

On a déjà vu cette année la définition de la racine carrée d'un nombre. C'est à la page 16 de votre cours, partie 2.7. La voici :

Définition 74. Si a est un nombre positif, on appelle racine carrée de a, et on note $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré vaut a.

Remarque. Si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(-\sqrt{a})^2 = a$

Exemple 119. $\sqrt{81} = 9$ $\qquad$ $\sqrt{169} = 13$ $\qquad$ $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

$\left(2 \times \sqrt{3}\right)^2 = 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} = 4 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12$

13.1.2 Valeur exacte, valeur approchée

Nombre a	Valeur exacte de $\sqrt{a}$	Valeur approchée de $\sqrt{a}$ au centième
19		
100		
113		
64		
225		
3		
63		

13.2 Opérations avec les racines carrées

13.2.1 Propriétés

Propriété 79. *Pour tous nombres a et b positifs, on a :* $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Si, de plus, b est non nul, alors : $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Démonstration :
$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$ et $(\sqrt{ab})^2 = ab$
$\sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$ sont donc deux nombres qui, mis au carré, sont égaux. Ils sont donc soit égaux, soit opposés. Comme ils sont tous deux positifs, ils sont donc égaux, CQFD.
La démonstration est analogue pour le quotient.

Propriété 80. *Conséquence de la propriété précédente : Si a est un nombre positif, alors* $\sqrt{a^2} = a$

Démonstration :
D'après la propriété 1., en prenant $b = a$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a}\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

Remarque. L'égalité $(\sqrt{a})^2 = a$ vient de la définition même de la racine carrée, alors que l'égalité $\sqrt{a^2} = a$ est une propriété (qui se démontre donc).

Exemple 120. $\sqrt{7^2} = 7$
$\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$
$\sqrt{7}\sqrt{28} = \sqrt{7 \times 28} = \sqrt{7 \times 7 \times 4} = \sqrt{7^2}\sqrt{4} = 7 \times 2 = 14$
$\sqrt{75}\sqrt{32} = \sqrt{75 \times 32} = \sqrt{25 \times 3 \times 16 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{3 \times 2}\sqrt{16} = 5 \times 4 \times \sqrt{6} = 20\sqrt{6}$
$\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\dfrac{75}{100}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{3}{27}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

Remarque. Il n'y a surtout pas de propriété équivalente pour l'addition !

Démonstration :
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$, donc ce n'est pas égal à $a + b$.

Exemple 121. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

13.2.2 Simplification d'expressions

Dans tous les exercices avec des racines carrées, il faudra toujours donner le résultat sous la forme la plus simple possible. La plus simple possible, cela signifie que l'on veut le nombre le plus petit possible sous le radical (le radical est le nom que l'on donne au symbole de la racine carrée).

Par exemple, on ne garde pas $\sqrt{18}$ comme résultat final d'un calcul :
$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Pour trouver l'expression la plus simple, il faut décomposer les nombres présents sous le radical en utilisant les carrés parfaits, en trouvant la plus grand carré parfait possible. Dans l'exemple précédent, on aurait pu décomposer 18 en 6 fois 3, mais cela n'aurait eu aucun intérêt car ni 6 ni 3 ne sont des carrés parfaits. L'intérêt d'avoir pris 9 fois 2, c'est que 9 est le carré de 3, donc à l'étape suivante, il reste un nombre plus petit sous le radical.

Exemple 122. Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible :
$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
$\sqrt{7} - \sqrt{112} = \sqrt{7} - \sqrt{16 \times 7} = \sqrt{7} - \sqrt{16}\sqrt{7} = \sqrt{7} - 4\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$
$5\sqrt{20}\sqrt{45}\sqrt{5} = 5\sqrt{20 \times 45 \times 5} = 5\sqrt{4 \times 5 \times 5 \times 9 \times 5} = 5\sqrt{4}\sqrt{5^2}\sqrt{9}\sqrt{5} = 5 \times 2 \times 5 \times 3 \times \sqrt{5} = 150\sqrt{5}$
$\sqrt{44} - 3\sqrt{176} = \sqrt{4 \times 11} - 3\sqrt{16 \times 11} = \sqrt{4}\sqrt{11} - 3\sqrt{16}\sqrt{11} = 2 \times \sqrt{11} - 3 \times 4 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11} - 12\sqrt{11}$
donc $\sqrt{44} - 3\sqrt{176} = -10\sqrt{11}$

13.3 Applications

13.3.1 Calculs avec les identités remarquables

Exemple 123. Développer et réduire les expressions suivantes :
$A = (5+\sqrt{2})^2 = 25 + 10\sqrt{2} + 2 = 27 + 10\sqrt{2}$
$B = (3-\sqrt{5})^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$
$C = (2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7}) = 4 - 7 = -3$
$D = (5\sqrt{2}-3)(3\sqrt{2}+7) = 15 \times 2 + 35\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 21 = 9 + 26\sqrt{2}$

13.3.2 Une jolie formule pour finir

Propriété 81. *Dans un repère orthonormé (O,I,J), si le point M a pour coordonnées $(x_M; y_M)$ et si le point N a pour coordonnées $(x_N; y_N)$, alors la distance MN est donné par le calcul suivant :*
$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

Démonstration :
Premier cas de figure : on suppose que $x_N > x_M$ et que $y_N > y_M$. On appelle I le point de coordonnées $(x_N; y_M)$. Le triangle INM est ainsi rectangle en I, avec $IM = x_N - x_M$ et $IN = y_N - y_M$. On applique le théorème de Pythagore :
$MN^2 = IM^2 + IN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2$. Or MN est une longueur, donc MN est positif, donc on a bien : $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

Exemple 124. Dans un repère orthonormé (O,I,J), on considère les points $A(4;4)$, $B(3;-1)$ et $C(1;2)$.

1. Faire une figure, en prenant 1 cm comme unité.
2. Calculer les distances AB, AC et BC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

Chapitre 14

Rappels des années précédentes

14.1 Théorème de Pythagore et sa réciproque

Exemple 125. On donne un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 5$ cm et $BC = 9$ cm. Déterminer la valeur exacte et la valeur approchée au dixième de la longueur AC.

Dans le triangle ABC rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$9^2 = 5^2 + AC^2$
$81 = 25 + AC^2$
$AC^2 = 81 - 25$
$AC^2 = 56$
AC est une longueur, donc $AC > 0$ donc $AC = \sqrt{56}$ cm (ve), soit $AC \approx 7,5$ cm (va).

Exemple 126. On donne un triangle DEF rectangle en F tel que $FD = 7$ cm et $EF = 3$ cm. Déterminer la valeur exacte et la valeur approchée au centième de la longueur ED.

Dans le triangle DEF rectangle en F, on applique le théorème de Pythagore :
$ED^2 = EF^2 + FD^2$
$ED^2 = 3^2 + 7^2$
$ED^2 = 9 + 49$
$ED^2 = 58$
ED est une longueur, donc $ED > 0$ donc $AC = \sqrt{58}$ cm (ve), soit $AC \approx 7,62$ cm (va).

Exemple 127. On donne un triangle ABC tel que $AB = 2,8$ cm, $BC = 5,3$ cm et $AC = 4,5$ cm. Quelle est la nature du triangle ABC ?

$[BC]$ est le plus grand côté.
D'une part : $BC^2 = 5,3^2 = 28,09$.
D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 2,8^2 + 4,5^2 = 7,84 + 20,25 = 28,09$.
On remarque que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

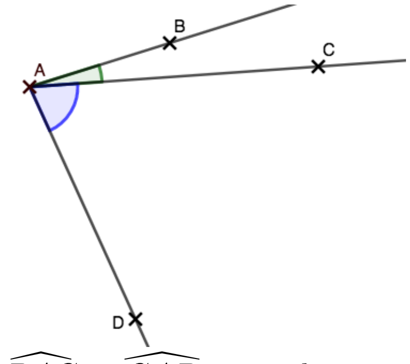
Exemple 128. On donne un triangle DEF tel que $DE = 2,8$ cm, $EF = 9,7$ cm et $DF = 10$ cm. Le triangle DEF est-il rectangle ?

$[DF]$ est le plus grand côté.
D'une part : $DF^2 = 10^2 = 100$.
D'autre part : $ED^2 + EF^2 = 2,8^2 + 9,7^2 = 7,84 + 94,09 = 101,93$.
On remarque que $DF^2 \neq ED^2 + EF^2$, donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle DEF n'est pas rectangle.

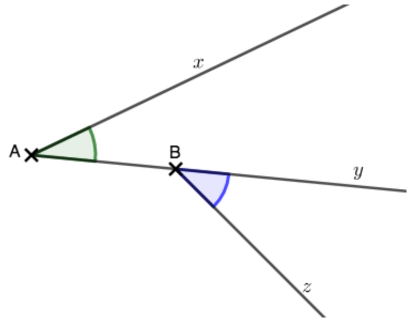
14.2 Angles

14.2.1 Vocabulaire

Définition 75. Deux angles sont adjacents lorsqu'ils ont le même sommet, un côté commun et lorsqu'ils sont situés de part et d'autre de leur côté commun.



$\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents.



$\widehat{xAy}$ et $\widehat{yBz}$ ne sont pas adjacents.

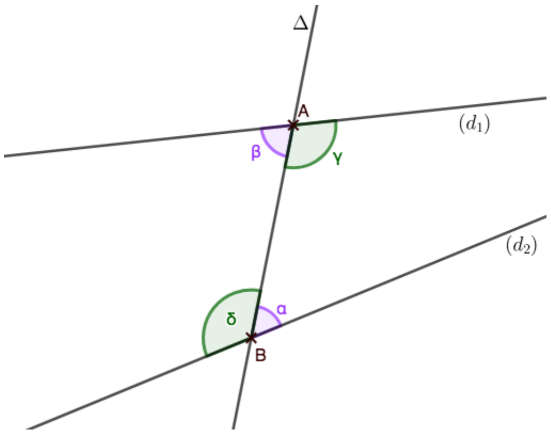
Définition 76. Lorsque la somme des mesures de deux angles est égale à 90°, on dit que ces deux angles sont complémentaires.

Définition 77. Lorsque la somme des mesures deux angles est égale à 180°, on dit que ces deux angles sont supplémentaires.

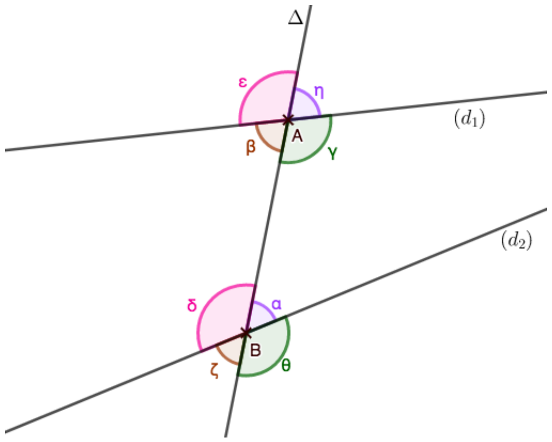
Définition 78. Deux angles sont opposés par le sommet quand ils ont le même sommet et quand ils ont leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

Définition 79. On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées en A et en B par une sécante Δ. Un angle de sommet A et un angle de sommet B sont alternes-internes quand ils sont situés de part et d'autre de la sécante Δ et entre les droites (d_1) et (d_2).

Définition 80. On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées en A et en B par une sécante Δ. Un angle de sommet A et un angle de sommet B sont correspondants quand ils sont situés du même côté de la sécante Δ, avec l'un entre les droites (d_1) et (d_2) et pas l'autre.



Les angles α et β sont alternes-internes.
Les angles γ et δ sont alternes-internes.



Les angles α et η sont correspondants.
Les angles γ et θ sont correspondants.
Les angles δ et ϵ sont correspondants.
Les angles β et ζ sont correspondants.

14.2.2 Propriétés

Propriété 82. *Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.*

Propriété 83. *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes (ou correspondants) qu'elles déterminent ont la même mesure.*

Propriété 84. *Réciproquement, si deux droites coupées par une sécante déterminent deux angles alternes-internes (ou correspondants) de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.*

14.3 Droites remarquables du triangle

14.3.1 Médiatrices

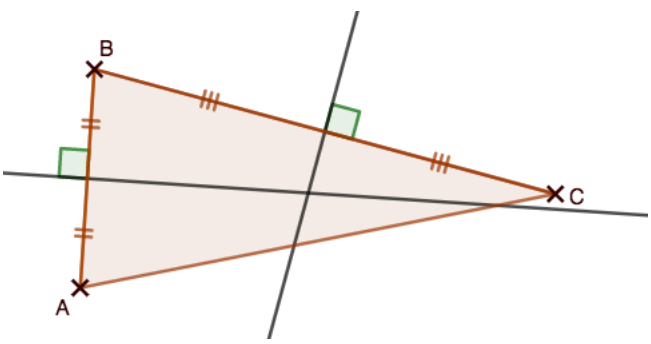
Définition 81. La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.
C'est aussi l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

Remarque. Pour construire la médiatrice d'un segment, on utilisera toujours la deuxième définition, un compas et une règle.

On choisit un écartement de compas plus grand à vue d'œil que la moitié du segment. On trace deux arcs de cercle de centre A (un de chaque coté du segment) et deux arcs de cercle de centre B (un de chaque coté du segment). On obtient un point d'intersection de chaque coté du segment, et la droite qui les relie est la médiatrice du segment $[AB]$.

Propriété 85. *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration :
Soit ABC un triangle et soit O le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Une médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment, donc, comme O appartient à la médiatrice de $[AB]$, O est équidistant de A et de B, donc $OA = OB$.
De même, comme O appartient à la médiatrice de $[AC]$, $OA = OC$.
On a donc $OA = OB = OC$, donc en particulier $OB = OC$ ce qui signifie que O est équidistant de B et de C, donc que O appartient à la médiatrice de $[BC]$. On a donc bien trouvé un point qui appartient aux trois médiatrices : elles sont concourantes.



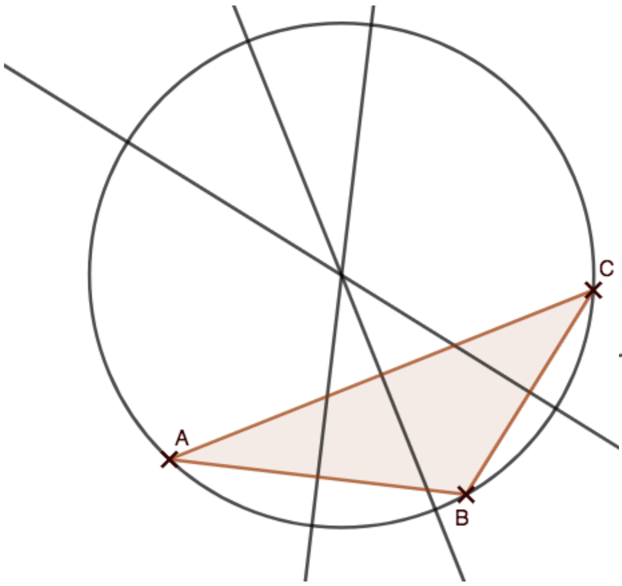
Définition 82. Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

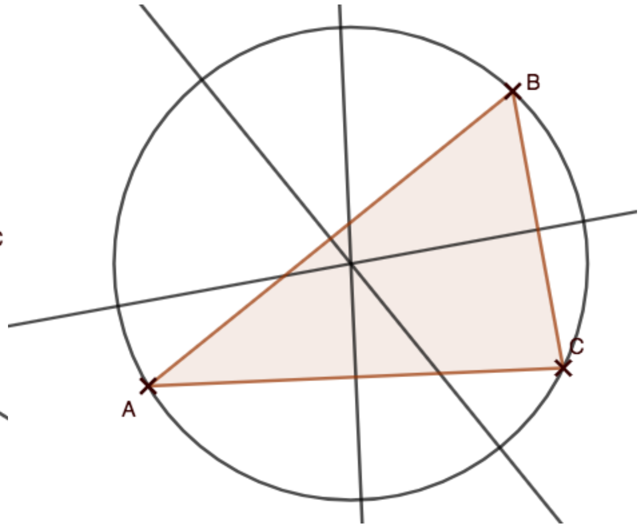
Propriété 86. *Le point d'intersection des trois médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

Démonstration :
En reprenant les notations de la démonstration précédente, on a $OA = OB = OC$, donc les points A, B et C sont bien tous les trois à la même distance du point O, donc ils sont sur un même cercle de centre O.

Remarque. Pour construire le cercle circonscrit à un triangle, on n'a donc besoin de construire que deux médiatrices pour avoir le centre.

Remarque. Le centre du cercle circonscrit à un triangle peut être à l'extérieur du triangle (quand il a un angle obtus).

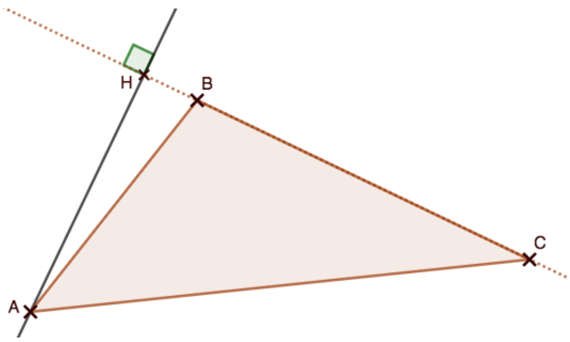


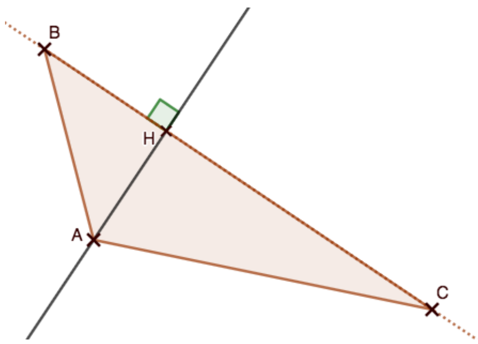


14.3.2 Hauteurs

Définition 83. Soit ABC un triangle quelconque.
La hauteur issue de A est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire au support du côté opposé, c'est-à-dire (BC).

Remarque. A retenir : Une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au support du côté opposé. La hauteur peut parfois être à l'extérieur du triangle (s'il a un angle obtus).

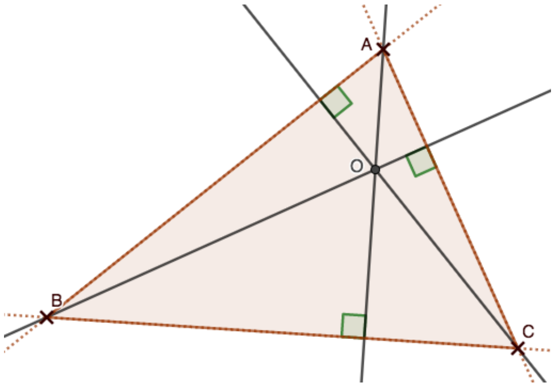


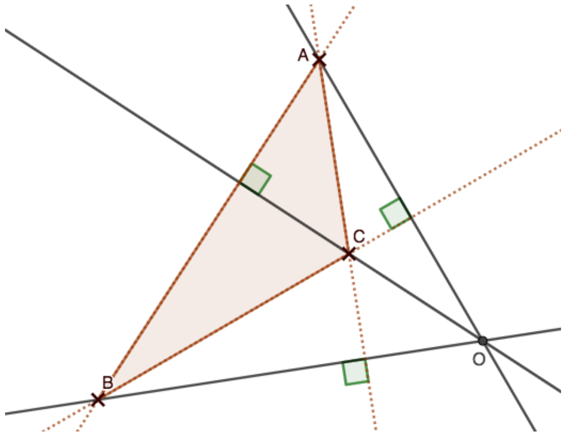


Propriété 87. *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Définition 84. Le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle s'appelle l'orthocentre.

Remarque. L'orthocentre n'est pas forcément à l'intérieur du triangle.

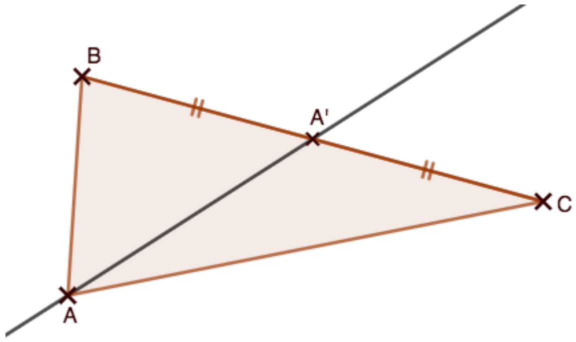




14.3.3 Médianes

Définition 85. Soit ABC un triangle quelconque.
La médiane issue de A (ou passant par A, ou relative à $[BC]$) est la droite qui passe par A et qui coupe le côté opposé, soit $[BC]$, en son milieu.

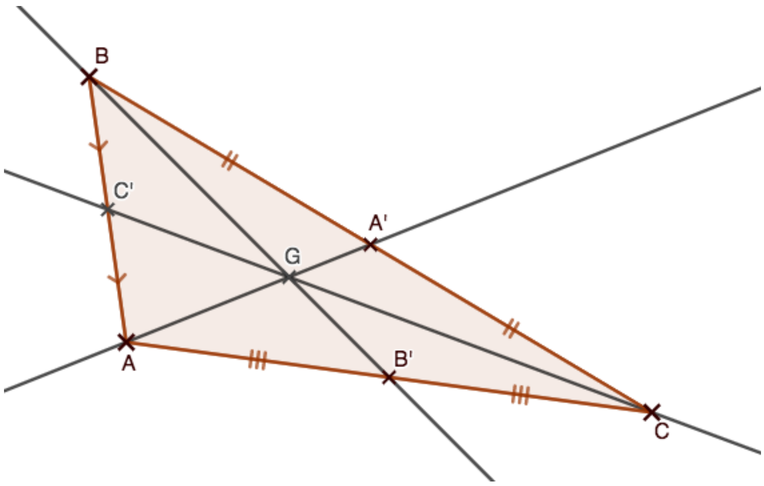
Remarque. A retenir : Une médiane est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé en son milieu.



Propriété 88. *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.*

Définition 86. Le point d'intersection des trois médianes d'un triangle s'appelle le centre de gravité du triangle.

Propriété 89. *Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane (restreinte au triangle) en partant des sommets.*



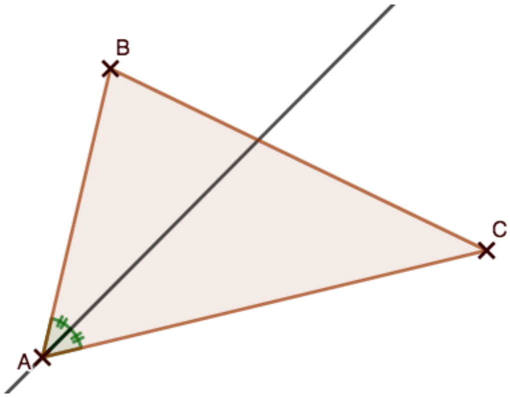
$$AG = \frac{2}{3} \times AA'$$

$$BG = \frac{2}{3} \times BB'$$

$$CG = \frac{2}{3} \times CC'$$

14.3.4 Bissectrices

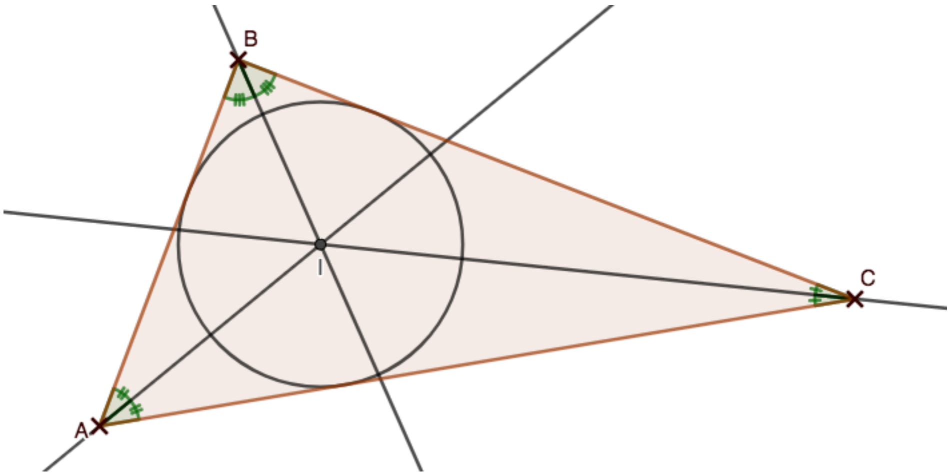
Définition 87. La bissectrice d'un angle est la droite qui sépare cet angle en deux angles de même mesure.



Propriété 90. *Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.*

Définition 88. Le cercle inscrit d'un triangle est le cercle qui touche chaque côté du triangle en étant complètement à l'intérieur du triangle.

Propriété 91. *Le point d'intersection des trois bissectrices d'un triangle est le centre du cercle inscrit du triangle.*



14.4 Fraction d'une quantité

Propriété 92. *Prendre une fraction d'une quantité revient à multiplier la fraction par la quantité.*

Exemple 129. Prendre la moitié de 32, c'est prendre 16. Par un calcul, on ferait : $\frac{1}{2} \times 32 = \frac{32}{2} = 16$

Exemple 130. Prendre les deux tiers de 42, c'est faire : $\frac{2}{3} \times 42 = \frac{2 \times 3 \times 14}{3} = 2 \times 14 = 28$

Exemple 131. Prendre les 24 % de 130, c'est faire :

$$\frac{24}{100} \times 130 = \frac{24 \times 130}{100} = \frac{2 \times 12 \times 10 \times 13}{10 \times 2 \times 5} = \frac{156}{5} = 31,2$$

14.5 Notations mathématiques et utilisation dans des phrases

Une droite se note entre parenthèses : la droite (AB). Une demi-droite avec un crochet et une parenthèse : la demi-droite $[AB)$. On peut utiliser une droite (ou n'importe quelle autre ensemble géométrique) dans un exercice sans l'avoir au préalable tracée.
Un segment se note entre crochets : le segment $[AB]$. La longueur d'un segment, elle, se note sans parenthèse : la longueur AB.
On pourra ainsi écrire : $AB = 6$ cm, mais il est absolument incorrect d'écrire $[AB] = 6$ cm. De même, on pourra écrire que tel segment mesure 6 cm, ou que telle longueur est égale à 6 cm, mais on n'écrira pas qu'un segment est égal à 6 cm ou qu'une longueur mesure 6 cm.

Le symbole $\in$ signifie « appartient à ». On pourra donc écrire par exemple : $B \in [CD]$ à la place de « Le point B appartient au segment [CD] ». Attention, $B \in$ à$[CD]$ est incorrect !
De même, le symbole // signifie « est parallèle à », le symbole $\perp$ signifie « est perpendiculaire à » et le symbole = signifie « est égal à ».

De manière générale, on ne mélange pas notations mathématiques et mots en français dans une même proposition. Ainsi, il est interdit d'écrire « Le point $A \in$ à $[CD]$ donc $CD = CA + AD$ » ou « Les droites (AB) et (CD) sont // ». En revanche, on peut tout à fait écrire « $A \in [CD]$ donc $CD = CA + AD$ » ou « [...] donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(AB)//(CD)$ ».

Enfin, il est fréquent de rencontrer l'abréviation « ie » (« id est »), qui signifie « c'est-à-dire » en latin.

Chapitre 15

Annexes

15.1 L'alphabet grec

Nom de la lettre	Ecriture en minuscule	Ecriture en majuscule
alpha	α	
bêta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ	
dzéta	ζ	
êta	η	
thêta	θ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	Ξ
omicron	o	
pi	π	Π
rhô	ρ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
upsilon	υ	Υ
phi	ϕ	Φ
khi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

15.2 Orthographe usuelle

Attention à l'orthographe des mots suivants : algorithme, arithmétique, hypothèse mais hypoténuse, milieu, Pythagore, Thalès, théorème.

15.3 Un peu de conjugaison

Je résous	Je résoudrai	J'ai résolu
Tu résous	Tu résoudras	Tu as résolu
Il résout	Il résoudra	Il a résolu
Nous résolvons	Nous résoudrons	Nous avons résolu
Vous résolvez	Vous résoudrez	Vous avez résolu
Elles résolvent	Elles résoudront	Elles ont résolu

15.4 Un peu de logique

Il est important de différencier une condition nécessaire d'une condition suffisante. Pour prendre un exemple « concret », on peut considérer les deux propositions suivantes : « il pleut » et « il y a des nuages ».
S'il pleut, c'est qu'il y a des nuages, donc « il y a des nuages » est une condition nécessaire à « il pleut ». Mais ce n'est pas une condition suffisante, car il peut y avoir des nuages sans pluie.

Revenons aux mathématiques : on considère la proposition « ABCD est un losange ».

« $ABCD$ est un parallélogramme » est une condition nécessaire pour que $ABCD$ soit un losange : si $ABCD$ est un losange, alors, nécessairement, $ABCD$ est un parallélogramme. Le contraire (la réciproque) est faux : il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des losanges. La condition n'est donc pas suffisante.
« $ABCD$ est un carré » est une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un losange. Dès que l'on sait que $ABCD$ est un carré, on sait que $ABCD$ est un losange, le contraire étant bien évidemment faux.

Lorsqu'une condition est à la fois nécessaire et suffisante, on dit que c'est une condition nécessaire et suffisante, et on est autorisé à employer la formule magique : « si et seulement si ». Par exemple, la condition « Les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, et sont perpendiculaires »est une condition nécessaire et suffisante pour que $ABCD$ soit un losange. Pour que $ABCD$ soit un losange, il faut, et il suffit, que ses diagonales se coupent en leur milieu et soit perpendiculaires. En d'autres termes, un quadrilatère est un losange si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

15.5 Statut de la lettre en mathématiques

15.5.1 Variable

Le mot variable signifie comme son nom l'indique « qui peut varier ». C'est le cas des premières lettres que l'on rencontre en mathématiques, dès l'école primaire, avec l'utilisation des formules de périmètre ou d'aire. On rencontre aussi les lettres-variables dans le tableur.

Exemple 132. « L'aire d'un carré de côté c est c^2. »
Ici, c est une variable.

15.5.2 Indéterminée

La lettre-indéterminée ne représente plus cette fois des nombres particuliers (la longueur d'un rectangle par exemple dans une formule) mais au contraires des nombres quelconques, comme dans une identité où l'égalité est toujours vraie.

Exemple 133. « Pour tous nombres a, b et k, on a $k(a+b) = ka + kb$. »
Ici, k, a et b sont des indéterminées.

15.5.3 Inconnue

La lettre-inconnue se rencontre dans les équations. Attention, il s'agit encore souvent d'une égalité, comme dans le cas précédent, mais d'une égalité qui peut être fausse. L'égalité n'est vraie que pour certaines valeurs de la lettre.

Exemple 134. « Résoudre l'équation $3x + 1 = 6$. »
Ici, x est une inconnue. On peut résoudre l'équation et trouver la valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie $\left(x = \dfrac{5}{3}\right)$.

15.5.4 Paramètre

La lettre-paramètre est la moins fréquente au collège. Elle représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres qui ont soit le statut de variable, soit le statut d'inconnue, soit le statut d'indéterminée.

Exemple 135. « Pour tous nombres a et b, l'équation $x + a = b$ a pour solution $x = b - a$. »
Ici, x est une inconnue, a et b sont des paramètres.

Exemple 136. « L'expression générale d'une fonction linéaire est $f : x \mapsto ax$. »(cf 10.1.1 page 56)
Ici, x est une variable et a un paramètre.

15.6 Statut du symbole d'égalité en mathématiques

Il faut être très rigoureux quant à l'utilisation du symbole =.

15.6.1 Résultat

Le signe = peut être utilisé pour fournir le résultat d'une opération. C'est l'utilisation la plus basique du signe =, utilisé très tôt à l'école primaire. Attention à ne pas traduire incorrectement à l'écrit un enchaînement de calcul oral.

Exemple 137. $6 + 4 \times 5 = 6 + 20 = 26$
Ici, le signe = sert à donner un résultat.

Exemple 138. « 5 plus 2 font 7, multiplié par 3 donne 21 » ne se traduit surtout pas par « $5 + 2 = 7 \times 3 = 21$ », car 21 n'est pas égal à $5 + 2$. On veillera à faire deux calculs distincts, ou à écrire $(5 + 2) \times 3 = 7 \times 3 = 21$.

15.6.2 Représentations identiques

Le signe = peut traduire l'égalité de deux représentations d'un même nombre. C'est le cas lors de décomposition sous forme d'un produit par exemple.

Exemple 139. $36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$

15.6.3 Identité

Le signe = peut être utilisé pour traduire une identité. Il montre l'universalité d'un énoncé (« Pour tous nombres... »).

Exemple 140. « Pour tous nombres a, b et k, on a $k(a + b) = ka + kb$. »

15.6.4 Équation

Le signe = n'est pas seulement utilisé dans des égalités vraies. Quand on écrit une équation, on se demande si l'énoncé peut être rendu vrai. En remplaçant l'inconnue par une valeur numérique, on peut obtenir une égalité vraie ou fausse. Il faut être extrêmement rigoureux lorsqu'il s'agit de tester une égalité. C'est le cas quand on cherche à savoir si un triangle est rectangle connaissant les longueurs de ses trois côtés.

Une égalité peut être vraie ou fausse, mais cela n'a pas de sens de dire qu'une équation est fausse. Une équation peut ne pas avoir de solution, mais ne peut pas être fausse.

Exemple 141. « Résoudre l'équation $-7x + 5 = 4$. »
L'égalité peut être vraie ou fausse selon la valeur de x choisie.
On résout l'équation :
$-7x = -1$
$x = \dfrac{1}{7}$
La solution de l'équation est $\dfrac{1}{7}$. Cela signifie que si on remplace x par $\dfrac{1}{7}$ dans l'équation $-7x+5 = 4$, on obtient une égalité vraie. Et si on remplace x par n'importe quel autre nombre, on obtient une égalité fausse.

Exemple 142. « -5 est-il solution de $3x^2 - 4x + 1 = -7x + 8$? »
$3x^2 - 4x + 1 = -7x + 8$ est une équation. Mais on n'a pas le droit de remplacer x par -5 en écrivant uniquement $3 \times (-5)^2 - 4 \times (-5) + 1 = -7 \times (-5) + 8$, car ce n'est plus une équation (il n'y a plus de x) et le signe = signifie alors par défaut qu'on a affaire à deux représentations du même nombre, donc qu'il y a égalité. Il faut alors bien rédiger pour se faire comprendre.

Première solution possible (on sépare bien les calculs) :
$3 \times (-5)^2 - 4 \times (-5) + 1 = 3 \times 25 + 20 + 1 = 96$
$-7 \times (-5) + 8 = 35 + 8 = 43$
$43 \neq 96$ donc -5 n'est pas solution de l'équation.

Deuxième solution possible (on explicite bien le sens de toutes les égalités qu'on écrit) :
Je cherche à savoir si l'égalité $3 \times (-5)^2 - 4 \times (-5) + 1 = -7 \times (-5) + 8$ est vraie.
Cela revient à savoir si l'égalité $3 \times 25 + 20 + 1 = 35 + 8$ est vraie.
Or $96 = 43$ est une égalité fausse, donc -5 n'est pas solution de l'équation.

Exemple 143. « Soit ABC un triangle tel que $AB = 6,5$ cm, $AC = 9,7$ cm et $BC = 7,2$ cm. Le triangle ABC est-il rectangle ? »
C'est la même difficulté que l'exemple précédent. Il faut tester si l'égalité de Pythagore est vraie.

Première solution possible (on sépare bien les calculs) :
$[AC]$ est le plus long côté.
D'une part : $AC^2 = 9,7^2 = 94,09$.
D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 6,5^2 + 7,2^2 = 42,25 + 51,84 = 94,09$.
On remarque que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Deuxième solution possible (on explicite bien le sens de toutes les égalités qu'on écrit) :
$[AC]$ est le plus long côté.
Je cherche à savoir si l'égalité $AC^2 = AB^2 + BC^2$ est vraie.
Cela revient à savoir si l'égalité $9,7^2 = 6,5^2 + 7,2^2$ est vraie.
Cela revient à savoir si l'égalité $94,09 = 42,25 + 51,84$ est vraie.
$94,09$ est bien égal à $42,25+51,84$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

15.6.5 Symbole d'affectation

C'est un cas de figure qui ne pose pas de problème. On va par exemple demander de calculer une expression en remplaçant une lettre par une valeur numérique.

Exemple 144. « On donne $A = -2x^2 + 5x - 7$. Calculer A pour $x = -1$. »
Ces deux signes = représentent une affectation.

Table des matières