Collège Léon Blum

Villepreux

Mathématiques
Classe de Cinquième (cycle 4)

LM Le Maux
lise-marie.le-maux@ac-versailles.fr

septembre 2018

Table des matières

1 Introduction **5**
1.1 L'alphabet grec . . . 5
1.2 Notations mathématiques et utilisation dans des phrases . . . 5
1.3 Orthographe usuelle . . . 6
1.4 Un peu de conjugaison . . . 6
1.5 Un peu de logique . . . 6
1.6 Utilisation du symbole d'égalité en mathématiques . . . 7

2 Enchaînement d'opérations **8**
2.1 Propriétés . . . 8
2.2 Somme ou produit . . . 9
2.3 Écrire une expression complexe . . . 10
2.4 Distributivité . . . 10
2.5 Division par un décimal . . . 11
2.5.1 Multiples et diviseurs, critères de divisibilité . . . 11
2.5.2 Division par un décimal . . . 12

3 Symétrie Centrale **13**
3.1 Rappel : médiatrice et symétrie axiale . . . 13
3.1.1 Médiatrice d'un segment . . . 13
3.1.2 Symétrie axiale . . . 14
3.2 Définition de la symétrie centrale et constructions . . . 16
3.3 Propriétés . . . 17
3.4 Centre de symétrie . . . 18

4 Nombres positifs en écriture fractionnaire **19**
4.1 Rappels . . . 19
4.1.1 Vocabulaire . . . 19
4.1.2 Remarques . . . 19
4.2 Égalité et simplification . . . 19
4.3 Comparaison . . . 20
4.3.1 Avec le même numérateur . . . 20
4.3.2 Avec le même dénominateur . . . 20
4.4 Addition et soustraction . . . 21
4.5 Multiplication . . . 21
4.6 Remarques finales et importantes . . . 21

5 Triangles **23**
5.1 Inégalité triangulaire . . . 23
5.2 Constructions . . . 24
5.2.1 Reproduction d'un angle . . . 24

5.2.2 Construction d'un triangle connaissant les 3 longueurs de ses côtés 24
5.2.3 Construction d'un triangle connaissant deux longueurs de côtés et l'angle entre les deux côtés 24
5.2.4 Construction d'un triangle connaissant une longueur de côté et les deux angles aux extrémités du côté 25
5.3 Médiatrices et cercle circonscrit 25
5.4 Médianes, hauteurs et bissectrices 26
5.4.1 Médianes 26
5.4.2 Hauteurs 27
5.4.3 Bissectrices 28

6 Calcul littéral **29**
6.1 Simplification d'écriture 29
6.2 Utiliser et produire une expression littérale 29
6.3 Tester une égalité 30
6.4 Distributivité et simplification d'écriture 31

7 Nombres relatifs - partie 1 **32**
7.1 Vocabulaire et comparaison 32
7.1.1 Première approche 32
7.1.2 Opposé 32
7.1.3 Comparaison 32
7.2 Graphiquement 33
7.2.1 Sur une droite 33
7.2.2 Dans un plan 33

8 Angles **34**
8.1 Vocabulaire 34
8.1.1 Rappels 34
8.1.2 Angles adjacents 34
8.1.3 Angles complémentaires, angles supplémentaires 34
8.1.4 Angles opposés par le sommet 35
8.1.5 Angles alternes-internes 35
8.1.6 Angles correspondants 36
8.2 Caractérisation angulaire du parallélisme 36
8.3 Somme des angles d'un triangle 39

9 Nombres relatifs partie 2 **41**
9.1 Somme et différence 41
9.1.1 Somme 41
9.1.2 Différence 41
9.2 Calculs complexes 41
9.2.1 Calculs enchaînés 41
9.2.2 Simplification d'écriture 42
9.2.3 Programme de calcul 42
9.2.4 Et avec des fractions, du calcul littéral et des priorités... 42

10 Grandeurs et mesures **43**
10.1 Durées 43
10.2 Masses 43
10.3 Longueurs 44

10.3.1 Unités de longueur . . . 44
10.3.2 Formules à connaître . . . 44
10.4 Aires . . . 44
10.4.1 Unités d'aire . . . 44
10.4.2 Aire d'un parallélogramme . . . 44
10.4.3 Aire d'un triangle . . . 45
10.4.4 Aire du disque . . . 46
10.4.5 Décomposition de surfaces complexes . . . 46
10.5 Volumes . . . 47
10.5.1 Unités de volume . . . 47
10.5.2 Volume du cube et du pavé droit . . . 47

11 Proportionnalité **48**
11.1 Définition et tableau de proportionnalité . . . 48
11.1.1 Grandeurs proportionnelles . . . 48
11.1.2 Reconnaître une situation de proportionnalité dans un tableau . . . 48
11.2 Déterminer une quatrième proportionnelle . . . 49
11.2.1 Retour à l'unité . . . 49
11.2.2 Addition ou soustraction de colonnes . . . 49
11.2.3 Multiplication ou division d'une colonne . . . 49
11.2.4 Coefficient de proportionnalité . . . 49
11.3 Pourcentages . . . 50
11.3.1 Utiliser un pourcentage . . . 50
11.3.2 Déterminer un pourcentage . . . 50
11.3.3 Appliquer une réduction ou une augmentation . . . 50
11.3.4 Déterminer un pourcentage de réduction ou d'augmentation . . . 50
11.4 Echelles . . . 50
11.4.1 Définition . . . 50
11.4.2 Utiliser une échelle . . . 51
11.4.3 Déterminer une échelle . . . 51
11.5 Proportion . . . 51

12 Parallélogrammes **52**
12.1 Parallélogramme . . . 52
12.1.1 Remarque préliminaire et définition . . . 52
12.1.2 Propriétés . . . 52
12.1.3 Constructions . . . 53
12.2 Rectangle, losange, carré . . . 54
12.2.1 Propriétés directes . . . 54
12.2.2 Propriétés avec les diagonales . . . 54
12.2.3 Autres propriétés . . . 54

13 Géométrie dans l'espace **56**
13.0.1 Le cube . . . 56
13.0.2 Le parallélépipède rectangle . . . 56
13.0.3 Le prisme droit . . . 57
13.0.4 Le cylindre de révolution . . . 57

14 Gestion de données **59**
14.1 Effectifs et fréquences 59
14.2 Représentations graphiques 60
14.3 Moyenne 61
14.4 Regroupement de données en classe 61

Chapitre 1

Introduction

1.1 L'alphabet grec

Nom de la lettre	Ecriture en minuscule	Ecriture en majuscule
alpha	α	
bêta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ	
dzéta	ζ	
êta	η	
thêta	θ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	Ξ
omicron	o	
pi	π	Π
rhô	ρ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
upsilon	υ	Υ
phi	ϕ	Φ
khi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

1.2 Notations mathématiques et utilisation dans des phrases

Une droite se note entre parenthèses : la droite (AB). Une demi-droite avec un crochet et une parenthèse : la demi-droite $[AB)$. On peut utiliser une droite (ou n'importe quelle autre ensemble géométrique) dans un exercice sans l'avoir au préalable tracée.
Un segment se note entre crochets : le segment $[AB]$. La longueur d'un segment, elle, se note sans parenthèse : la longueur AB.
On pourra ainsi écrire : $AB = 6$ cm, mais il est absolument incorrect d'écrire $[AB] = 6$ cm. De même, on pourra écrire que tel segment mesure 6 cm, ou que telle longueur est égale à 6 cm, mais

on n'écrira pas qu'un segment est égal à 6 cm ou qu'une longueur mesure 6 cm.

Le symbole $\in$ signifie « appartient à ». On pourra donc écrire par exemple : $B \in [CD]$ à la place de « Le point B appartient au segment [CD] ». Attention, $B \in$ à$[CD]$ est incorrect !
De même, le symbole // signifie « est parallèle à », le symbole $\perp$ signifie « est perpendiculaire à » et le symbole = signifie « est égal à ».

De manière générale, on ne mélange pas notations mathématiques et mots en français dans une même proposition. Ainsi, il est interdit d'écrire « Le point $A \in$ à $[CD]$ donc $CD = CA + AD$ » ou « Les droites (AB) et (CD) sont // ». En revanche, on peut tout à fait écrire « $A \in [CD]$ donc $CD = CA + AD$ » ou « [...] donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(AB)//(CD)$ ».

Enfin, il est fréquent de rencontrer l'abréviation « ie » (« id est »), qui signifie « c'est-à-dire » en latin.

1.3 Orthographe usuelle

Attention à l'orthographe des mots suivants : algorithme, arithmétique, hypothèse mais hypoténuse, milieu, théorème.

1.4 Un peu de conjugaison

Je résous	Je résoudrai	J'ai résolu
Tu résous	Tu résoudras	Tu as résolu
Il résout	Il résoudra	Il a résolu
Nous résolvons	Nous résoudrons	Nous avons résolu
Vous résolvez	Vous résoudrez	Vous avez résolu
Elles résolvent	Elles résoudront	Elles ont résolu

1.5 Un peu de logique

Il est important de différencier une condition nécessaire d'une condition suffisante. Pour prendre un exemple « concret », on peut considérer les deux propositions suivantes : « il pleut » et « il y a des nuages ».
S'il pleut, c'est qu'il y a des nuages, donc « il y a des nuages » est une condition nécessaire à « il pleut ». Mais ce n'est pas une condition suffisante, car il peut y avoir des nuages sans pluie.

Revenons aux mathématiques : on considère la proposition « ABCD est un losange ».

« $ABCD$ est un parallélogramme » est une condition nécessaire pour que $ABCD$ soit un losange : si $ABCD$ est un losange, alors, nécessairement, $ABCD$ est un parallélogramme. Le contraire (la réciproque) est faux : il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des losanges. La condition n'est donc pas suffisante.
« $ABCD$ est un carré » est une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un losange. Dès que l'on sait que $ABCD$ est un carré, on sait que $ABCD$ est un losange, le contraire étant bien évidemment faux.

Lorsqu'une condition est à la fois nécessaire et suffisante, on dit que c'est une condition nécessaire et suffisante, et on est autorisé à employer la formule magique : « si et seulement si ». Par exemple,

la condition « Les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, et sont perpendiculaires »est une condition nécessaire et suffisante pour que $ABCD$ soit un losange. Pour que $ABCD$ soit un losange, il faut, et il suffit, que ses diagonales se coupent en leur milieu et soit perpendiculaires. En d'autres termes, un quadrilatère est un losange si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

1.6 Utilisation du symbole d'égalité en mathématiques

Il faut être très rigoureux quant à l'utilisation du symbole $=$.

Le signe $=$ peut être utilisé pour fournir le résultat d'une opération. C'est l'utilisation la plus basique du signe $=$, utilisé très tôt à l'école primaire. Attention à ne pas traduire incorrectement à l'écrit un enchaînement de calcul oral.

Exemple 1. $6 + 4 \times 5 = 6 + 20 = 26$
Ici, le signe $=$ sert à donner un résultat.

Exemple 2. « 5 plus 2 font 7, multiplié par 3 donne 21 » ne se traduit surtout pas par « $5 + 2 = 7 \times 3 = 21$ », car 21 n'est pas égal à $5 + 2$. On veillera à faire deux calculs distincts, ou à écrire $(5 + 2) \times 3 = 7 \times 3 = 21$.

Le signe $=$ signifie de manière générale que deux expressions sont identiques. Ainsi si on veut écrire 10 comme la somme de deux nombres entiers, on écrira $10 = 1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5$. Le signe $=$ ne sert pas alors à donner un résultat.

Il faut donc toujours veiller à ce que l'on écrit de chaque côté d'un signe $=$ donne bien le même résultat.

Chapitre 2

Enchaînement d'opérations

2.1 Propriétés

Propriété 1. *Dans une expression, les calculs entre parenthèses sont prioritaires.*

Exemple 3.

$A = 7 \times (3 + 8)$
$A = 7 \times 11$
$A = 77$

$B = 6 \times (10 - 7)$
$B = 6 \times 3$
$B = 18$

Remarque. Lorsqu'il y a plusieurs parenthèses emboîtées, on commence par les parenthèses les plus intérieures.

Exemple 4.

$C = 3 \times [17 - (5 + 6)]$
$C = 3 \times (17 - 11)$
$C = 3 \times 6$
$C = 18$

Propriété 2. *Dans une expression sans parenthèses avec uniquement des additions et des soustractions, on effectue les calculs de gauche à droite.*

Exemple 5.

$D = 18 - 5 + 7$
$D = 13 + 7$
$D = 20$

$E = 12 + 6 - 7 - 9 + 5 - 1$
$E = 18 - 7 - 9 + 5 - 1$
$E = 11 - 9 + 5 - 1$
$E = 2 + 5 - 1$
$E = 7 - 1$
$E = 6$

Remarque. Dans une expression avec uniquement des additions, on peut effectuer les calculs dans n'importe quel ordre.

Exemple 6.

$F = 2,1 + 5 + 4,8 + 7,9 + 5,2$
$F = 2,1 + 7,9 + 4,8 + 5,2 + 5$
$F = 10 + 10 + 5$
$F = 25$

Propriété 3. *Dans une expression sans parenthèses avec uniquement des multiplications et des divisions, on effectue les calculs de gauche à droite.*

Exemple 7.

$G = 15 \times 10 : 6 \times 2$
$G = 150 : 6 \times 2$
$G = 25 \times 2$
$G = 50$

$H = 15 \times 10 : (6 \times 2)$
$H = 15 \times 10 : 12$
$H = 150 \times 12$
$H = 12,5$

$I = 24 : 3 \times 4 : 2$
$I = 8 \times 4 : 2$
$I = 32 : 2$
$I = 16$

Remarque. Dans une expression avec uniquement des multiplications, on peut effectuer les calculs dans n'importe quel ordre.

Exemple 8.

$J = 25 \times 5,13 \times 4$
$J = 5,13 \times 25 \times 4$
$J = 5,13 \times 100$
$J = 513$

$K = 8 \times 9,74 \times 1,25 \times 2$
$K = 9,74 \times 2 \times 8 \times 1,25$
$K = 19,48 \times 10$
$K = 194,8$

Propriété 4. *Dans une expression sans parenthèses, on effectue les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions.*

Remarque. On dit aussi que la multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.

Exemple 9.

$L = 43 - 6 \times 5$
$L = 43 - 30$
$L = 13$

$M = 7 + 15 : 3$
$M = 7 + 5$
$M = 12$

$N = 13 - 2 \times 5 + 6 : 3$
$N = 13 - 10 + 2$
$N = 3 + 2$
$N = 5$

Exemple 10.

$P = [9 + 5 \times 2 - (10 - 2 \times 3)] \times 2$
$P = [9 + 10 - (10 - 6)] \times 2$
$P = (9 + 10 - 4) \times 2$
$P = (19 - 4) \times 2$
$P = 15 \times 2$
$P = 30$

$Q = 54 : (23 - 7 \times 2) + 5 \times [12 - (9 + 3 : 2)]$
$Q = 54 : (23 - 14) + 5 \times [12 - (9 + 1,5)]$
$Q = 54 : 9 + 5 \times (12 - 10,5)$
$Q = 6 + 5 \times 1,5$
$Q = 6 + 7,5$
$Q = 13,5$

2.2 Somme ou produit

Définition 1. Dans une addition ou une soustraction, les objets que l'on additionne ou que l'on soustrait s'appellent les termes.
Une somme est le résultat d'une addition.
Une différence est le résultat d'une soustraction.
Les objets que l'on multiplie s'appellent les facteurs.
Un produit est le résultat d'une multiplication.
Un quotient est le résultat d'une division.

Remarque. Pour déterminer si une expression est une somme ou un produit, il faut connaître l'opération à effectuer en dernier.

Exemple 11.

$9 \times 5 + 4$ est une somme.
$5 \times 8 - 50 : 2$ est une différence.

$(7 + 8) \times 9$ est un produit.
$(5 + 4) \times (6 + 5)$ est un produit.

$(12 - 5) + 8$ est une somme.
$15 - 3 \times 2$ est une différence.

Exemple 12. Le produit de quatre par la somme de douze et de cinq s'écrit $4 \times (12 + 5)$.
La somme du produit de six par huit et de vingt s'écrit $6 \times 8 + 20$.
La somme de neuf et du produit de onze par trois s'écrit $9 + 11 \times 3$.

2.3 Écrire une expression complexe

Dans un problème donné où pour trouver la solution il faut enchaîner plusieurs calculs, il faut maintenant arriver à écrire (et à calculer) une seule expression, en pensant à mettre des parenthèses si besoin.

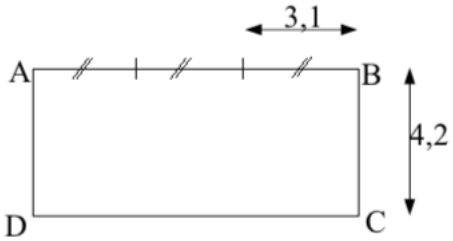
Exemple 13. Dans un garage, on récupère dans des tonneaux l'huile de vidange pour la recycler. Quatre tonneaux de 250 L et trois de 125 L sont remplis d'huile usagée. Écrire en une expression le calcul de la quantité d'huile récupérée et effectuer ce calcul.

$4 \times 250 + 3 \times 125 = 1000 + 375 = 1375$
1 375 L d'huile usagée ont été récupérés.

Exemple 14. Léa a payé 28 € quatre ours en peluche identiques. Sylvie en achète un seul. Elle avait 200 €d'économie. Écrire en une expression le calcul de l'argent qu'il lui reste et effectuer le calcul.

$200 - 28 : 4 = 200 - 7 = 193$
Il reste 193 € à Sylvie.

Exemple 15. L'unité de longueur étant le centimètre, écrire en une expression le périmètre du rectangle $ABCD$ et le calculer.

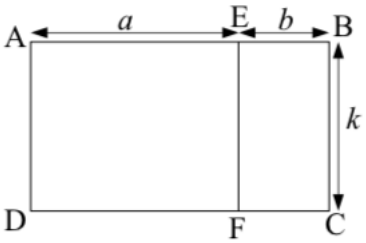


$2 \times (3 \times 3,1) + 2 \times 4,2 = 2 \times 9,3 + 8,4 = 18,6 + 8,4 = 27$
$ABCD$ a un périmètre de 27 cm.

2.4 Distributivité

Propriété 5. *Pour tous nombres k, a et b, on a : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.*

Démonstration :



On peut calculer l'aire du rectangle $ABCD$ de deux manières différentes :
$A_{ABCD} = AB \times BC = (a + b) \times k$
$A_{ABCD} = A_{AEFD} + A_{EBCF} = AE \times AD + EB \times BC = a \times k + b \times k$
On a donc bien $(a + b) \times k = a \times k + b \times k$ c'est-à-dire $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.

Exemple 16. On peut ainsi calculer de deux manières différentes certaines expressions comme $A = 5 \times (13 + 4)$:

$A = 5 \times 17$
$A = 85$

$A = 5 \times 13 + 5 \times 4$
$A = 65 + 20$
$A = 85$

Remarque. C'est une propriété connue et utilisée dès l'école élémentaire pour faciliter certains calculs mentaux.

Exemple 17. Effectuer les calculs suivants sans poser de calcul :

$B = 9,9 \times 3,4$	$C = 23,1 \times 12$	$D = 47,6 \times 21$
$B = (10 - 0,1) \times 3,4$	$C = 23,1 \times (10 + 2)$	$D = 47,6 \times (20 + 1)$
$B = 10 \times 3,4 - 0,1 \times 3,4$	$C = 23,1 \times 10 + 23,1 \times 2$	$D = 47,6 \times 20 + 47,6 \times 1$
$B = 34 - 0,34$	$C = 231 + 46,2$	$D = 952 + 47,6$
$B = 33,66$	$C = 277,2$	$D = 999,6$

Remarque. La propriété 5 est une égalité, elle peut se lire dans les deux sens.

Définition 2. Quand on lit de gauche à droite : $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$, on transforme un produit en somme. C'est ce qu'on appelle un développement.

Remarque. Dans l'exemple 17, on en donc effectué des développements pour effectuer les calculs plus simplement.

Définition 3. Quand on lit de droite à gauche : $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$, on transforme une somme en produit. C'est ce qu'on appelle une factorisation.

Exemple 18. Factoriser les expressions suivantes et effectuer les calculs :

$E = 56,83 \times 98,3 + 56,83 \times 1,7$	$F = 154,02 \times 213,97 - 13,97 \times 154,02$	$G = 63,24 \times 9 + 63,24$
$E = 56,83 \times (98,3 + 1,7)$	$F = 154,02 \times (213,97 - 13,97)$	$G = 63,24 \times (9 + 1)$
$E = 56,83 \times 100$	$F = 154,02 \times 200$	$G = 63,24 \times 10$
$E = 5\ 683$	$F = 30\ 804$	$G = 632,4$

2.5 Division par un décimal

2.5.1 Multiples et diviseurs, critères de divisibilité

Définition 4. Un nombre a est divisible par un nombre b si le reste de la division euclidienne de a par b est nul. Dans ce cas, on dit aussi que a est un multiple de b ou que b est un diviseur de a.

Exemple 19. $56 = 8 \times 7$ donc 56 est un multiple de 8 ; 56 est un multiple de 7 ; 8 est un diviseur de 56 ; 7 est un diviseur de 56 ; 8 divise 56 ; 7 divise 56.

Propriété 6. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 2 s'il est pair, ie s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

Exemple 20. 46 est divisible par 2.
Tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

Propriété 7. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 3.

Exemple 21. 255 est divisible par 3 car $2 + 5 + 5 = 12$ et 12 est divisible par 3.
452 n'est pas divisible par 3 car $4 + 5 + 2 = 11$ et 11 n'est pas divisible par 3.

Propriété 8. *Soit n un entier naturel supérieur à 100.*
n est divisible par 4 si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Remarque. Pour les nombres plus petits que 100, on peut décomposer avec des multiples de 4. Par exemple, $86 = 40 + 40 + 6$ et 6 n'est pas divisible par 4 donc 86 n'est pas divisible par 4. En revanche, $92 = 40 + 40 + 12$ donc 92 est divisible par 4.

Exemple 22. 52 est divisible par 4 car $52 = 40 + 12$.
254 n'est pas divisible par 4 car 54 n'est pas divisible par 4 ($54 = 40 + 14$).
12 632 est divisible par 4 car 32 est divisible par 4.

Propriété 9. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Exemple 23. 605 est divisible par 5 mais 721 n'est pas divisible par 5.

Propriété 10. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Exemple 24. 252 est divisible par 9 car $2 + 5 + 2 = 9$.
43 812 est divisible par 9 car $4 + 3 + 8 + 1 + 2 = 18$.
3 333 n'est pas divisible par 9 car $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Propriété 11. *Soit n un entier naturel.*
n est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Exemple 25. 16 520 est divisible par 10 mais 10 101 n'est pas divisible par 10.

2.5.2 Division par un décimal

Propriété 12. *Le résultat d'une division ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre, en particulier par 10, 100, ...*

Conséquence : Pour diviser par un nombre décimal, on multiplie le dividende et le diviseur par 10, 100, 1000, ... pour ne plus avoir de virgule au diviseur.

Exemple 26. Diviser 1,56 par 2,5 revient à diviser 15,6 par 25 ou à diviser 156 par 250.
$1,56 : 2,5 = 156 : 250 = 0,624$

Exemple 27. 56,88 : 4,5 = 568,8 : 45 = 12,64

Exemple 28. la troncature au centième de 1,9 : 6,75 = 190 : 675 est égale à 0,28

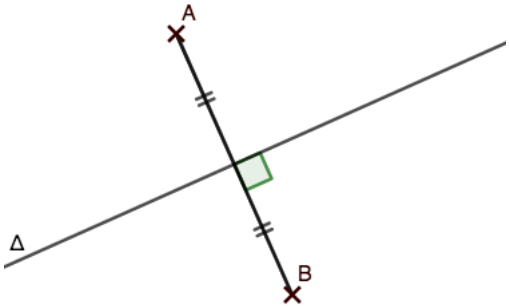
Chapitre 3

Symétrie Centrale

3.1 Rappel : médiatrice et symétrie axiale

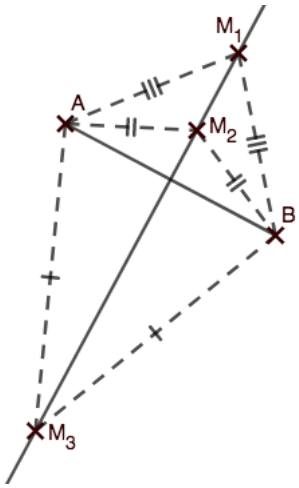
3.1.1 Médiatrice d'un segment

Définition 5. Soit $[AB]$ un segment.
La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite Δ perpendiculaire à (AB) et qui passe par le milieu de $[AB]$.



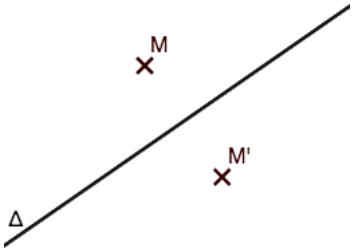
Autre définition possible :

Définition 6. Soit $[AB]$ un segment.
La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $MA = MB$.



3.1.2 Symétrie axiale

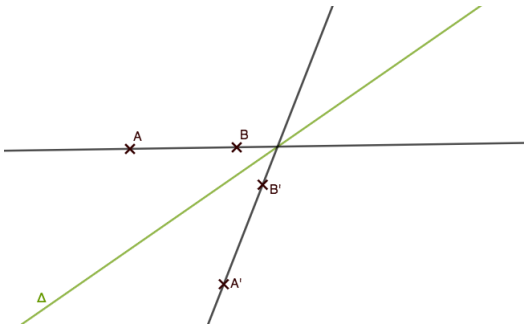
Définition 7. Soient M un point et Δ une droite. Le symétrique du point M par rapport à la droite Δ est le point M' tel que Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.



Remarque. On apparente souvent la symétrie axiale à un pliage (ou à une image dans un miroir).

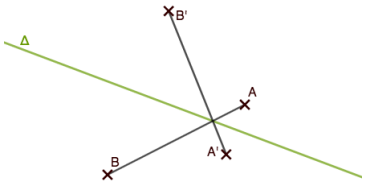
Propriété 13. *L'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite.*

Remarque. Pour construire l'image d'une droite, il faut construire les images de deux points distincts de la droite.

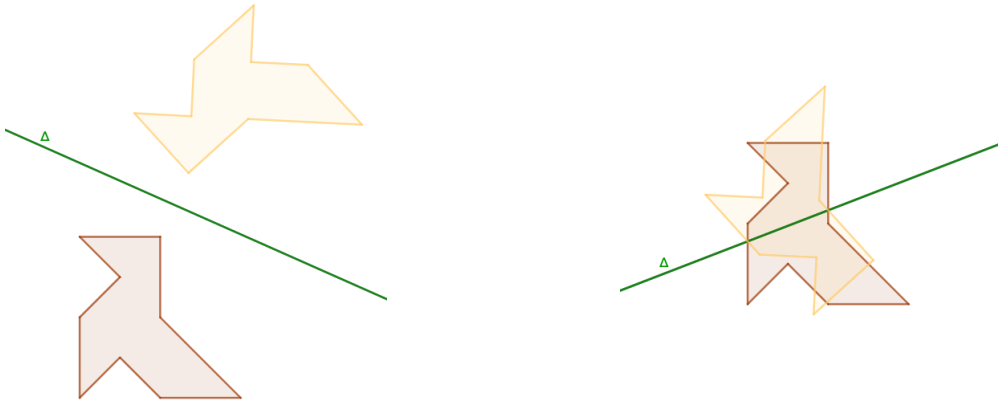


Propriété 14. *L'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même mesure.*

Remarque. On dit aussi que la symétrie axiale conserve les longueurs.

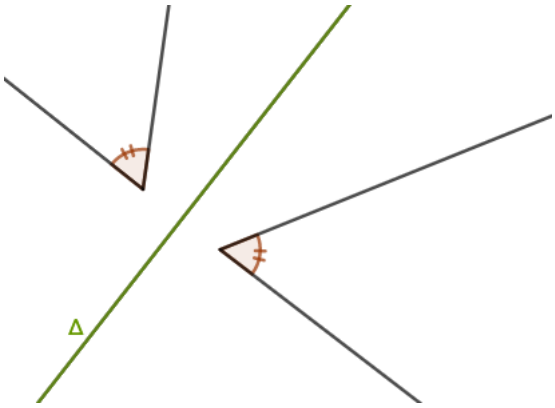


Remarque. Pour construire l'image d'un polygone, il faut construire les images de chacun de ses sommets.
L'image d'un polygone est donc un polygone de même aire.

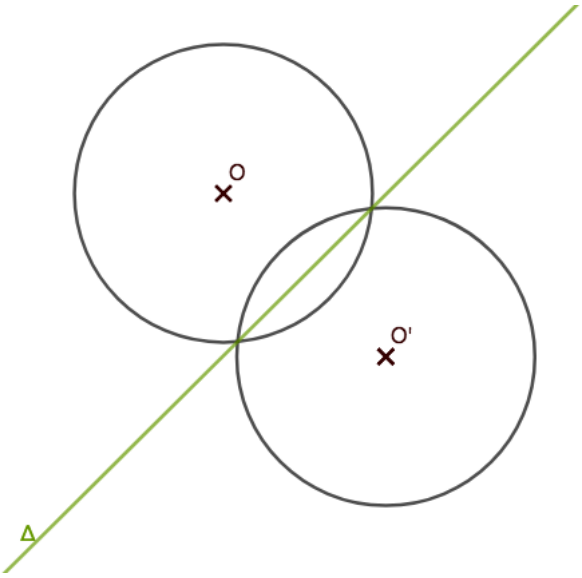


Propriété 15. *L'image d'un angle par une symétrie axiale est un angle de même mesure.*

Remarque. On dit que la symétrie axiale conserve les angles.

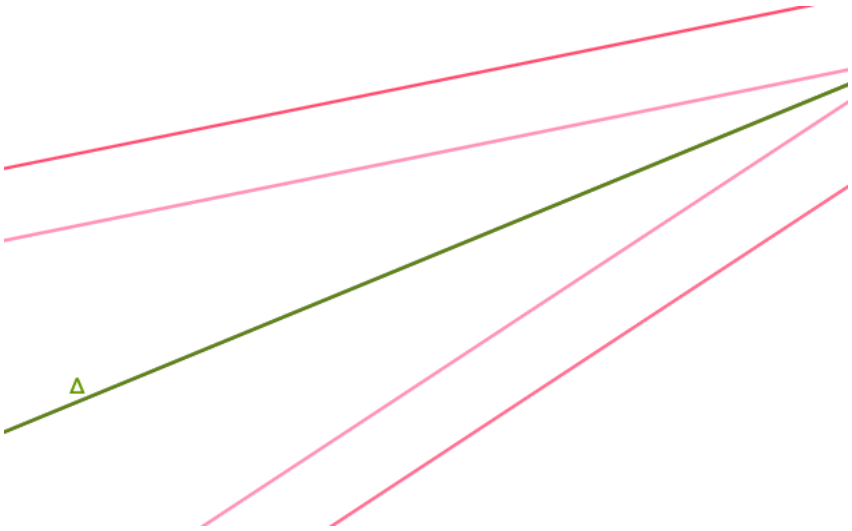


Propriété 16. *L'image d'un cercle par une symétrie axiale est un cercle de même rayon.*

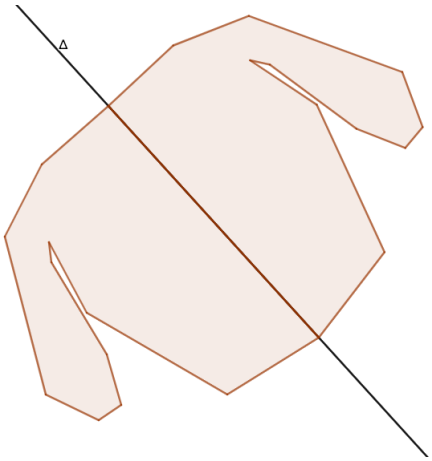


Propriété 17. *Les images de deux droites parallèles par une symétrie axiale sont deux droites parallèles.*

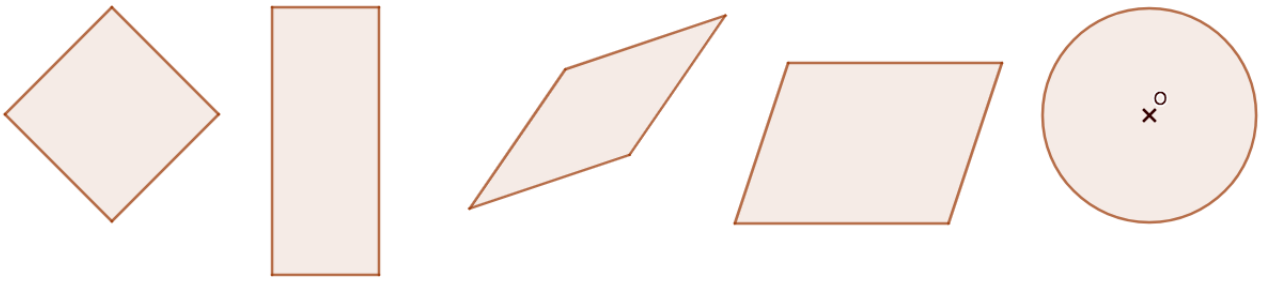
Remarque. On dit que la symétrie axiale conserve le parallélisme.



Définition 8. Lorsqu'une figure $\mathscr{F}$ et son image $\mathscr{F}'$ par une symétrie axiale d'axe Δ sont confondues, on dit que Δ est un axe de symétrie de la figure $\mathscr{F}$.

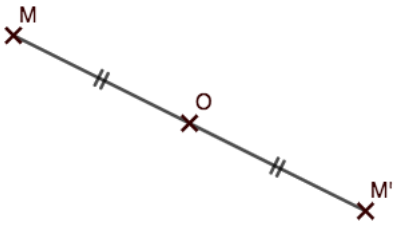


Propriété 18. *Le carré a quatre axes de symétrie, le rectangle deux, le losange deux, le cercle une infinité et le parallélogramme n'en a aucun.*



3.2 Définition de la symétrie centrale et constructions

Définition 9. Soient M et O deux points distincts.
Le symétrique du point M par rapport au point O est le point M' tel que O est le milieu du segment $[MM']$.

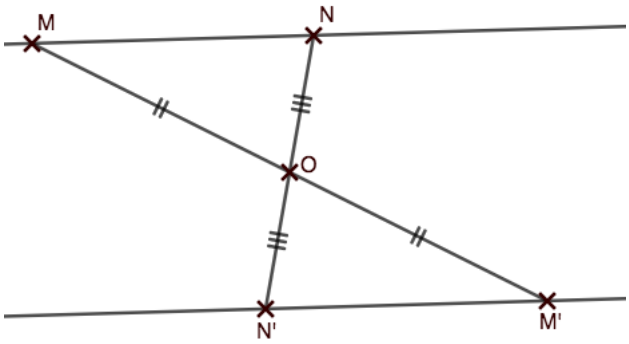


Remarque. On apparente souvent la symétrie centrale à un demi-tour autour d'un point.

3.3 Propriétés

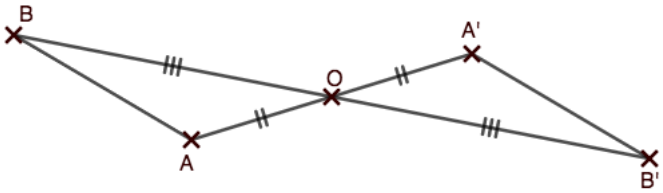
Propriété 19. *L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.*

Remarque. Pour construire l'image d'une droite, il faut construire les images de deux points distincts de la droite.



Propriété 20. *L'image d'un segment par une symétrie centrale est un segment parallèle et de même mesure.*

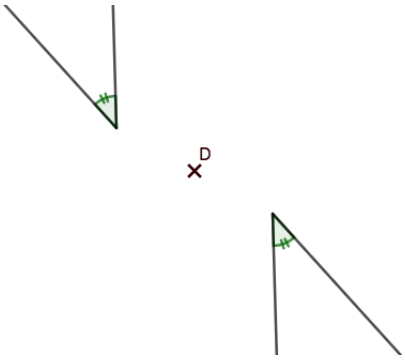
Remarque. On dit aussi que la symétrie centrale conserve les longueurs.



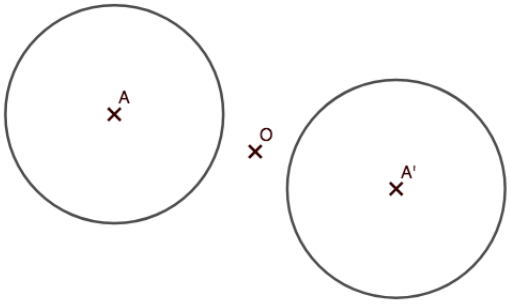
Remarque. Pour construire l'image d'une polygone, il faut construire les images de chacun de ses sommets.

Propriété 21. *L'image d'un angle par une symétrie centrale est un angle de même mesure.*

Remarque. On dit que la symétrie centrale conserve les angles (ce qui est un abus de langage, on devrait dire que la symétrie centrale conserve les mesures des angles).

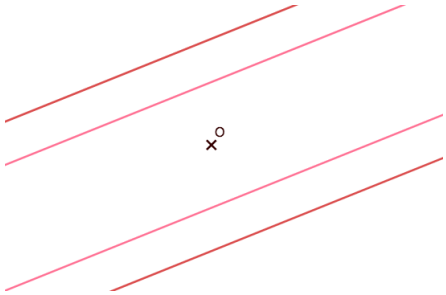


Propriété 22. *L'image d'un cercle par une symétrie centrale est un cercle de même rayon.*



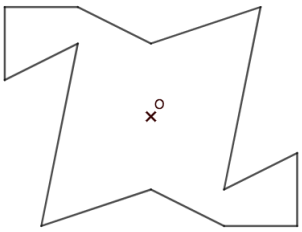
Propriété 23. *Les images de deux droites parallèles par une symétrie centrale sont deux droites parallèles.*

Remarque. On dit que la symétrie axiale conserve le parallélisme.

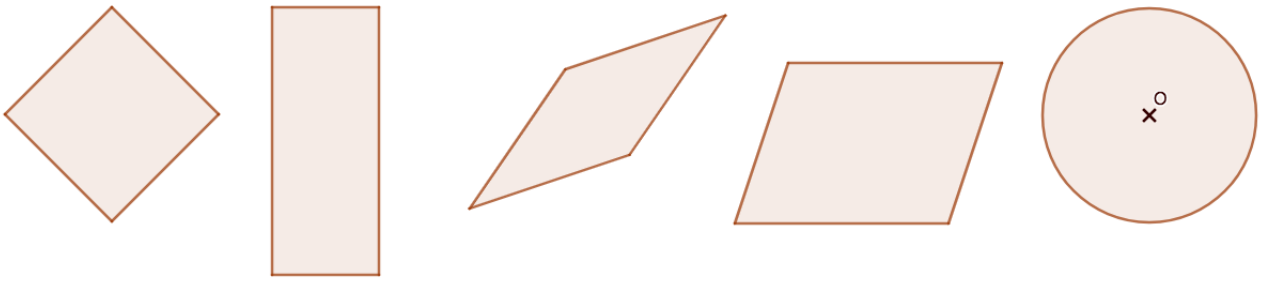


3.4 Centre de symétrie

Définition 10. Lorsqu'une figure $\mathscr{F}$ et son image $\mathscr{F}'$ par une symétrie centrale de centre O sont confondues, on dit que O est un centre de symétrie de la figure $\mathscr{F}$.



Propriété 24. *Le parallélogramme a un centre de symétrie, ainsi que le rectangle, le losange, le carré. Le centre de symétrie est le point d'intersection des diagonales. Le cercle a également un centre de symétrie, qui est son centre.*



Chapitre 4

Nombres positifs en écriture fractionnaire

4.1 Rappels

4.1.1 Vocabulaire

Définition 11. Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$. Le quotient de a par b peut s'écrire $\frac{a}{b}$: c'est une écriture fractionnaire. a est appelé le numérateur, et b le dénominateur.

Définition 12. Si a et b sont deux nombres entiers, $\frac{a}{b}$ est une fraction.

4.1.2 Remarques

Tout nombre décimal sous s'écrire sous forme d'une fraction. Un nombre décimal est d'ailleurs défini comme un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (c'est-à-dire 10, 100, 1 000, 10 000, etc.).

Exemple 29. $5,03 = \frac{503}{100} = \frac{50300}{10000} = ...$

$89,5 = \frac{895}{10} = ...$

$456 = \frac{456}{1} = \frac{4560}{10} = ...$

L'inverse est faux : toute fraction ne peut pas s'écrire sous forme d'un nombre décimal. Attention, un nombre décimal n'est donc pas simplement « un nombre à virgule ».

Exemple 30. $\frac{1}{3}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre décimal.

$\frac{1}{3} \approx 1,3333$. On peut seulement donner une valeur approchée de $\frac{1}{3}$ avec une précision donnée.

4.2 Égalité et simplification

Propriété 25. *On ne change pas un nombre en écriture fractionnaire en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.*
Autrement dit :
Soient a, b, et k trois nombres avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$. Alors : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ *et* $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$

Exemple 31. $\dfrac{3}{4,2} = \dfrac{3 \times 10}{4,2 \times 10} = \dfrac{30}{42} = \dfrac{30 : 6}{42 : 6} = \dfrac{5}{7}$

Définition 13. Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits que ceux de la fraction d'origine.

Exemple 32. $\dfrac{15}{6} = \dfrac{3 \times 5}{3 \times 2} = \dfrac{5}{2}$

$\dfrac{60}{45} = \dfrac{15 \times 4}{15 \times 3} = \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{8}{32} = \dfrac{8 \times 1}{8 \times 4} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{132}{11} = \dfrac{11 \times 12}{11} = 12$

Remarque. Lorsque l'on ne peut plus simplifier une fraction, on dit qu'elle est irréductible.

4.3 Comparaison

4.3.1 Avec le même numérateur

Propriété 26. *Si deux fractions ont le même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.*

Exemple 33. $\dfrac{3}{7} > \dfrac{3}{8}$ car $7 < 8$

4.3.2 Avec le même dénominateur

Propriété 27. *Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.*

Exemple 34. $\dfrac{4}{17} < \dfrac{5}{17}$ car $4 < 5$

Exemple 35. Rangeons dans l'ordre croissant les fractions suivantes : $\dfrac{13}{18}$; $\dfrac{5}{9}$; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{22}{36}$.

Ces fractions n'ont pas le même dénominateur, mais on peut facilement réduire toutes les fractions au même dénominateur, 18 par exemple.

$\dfrac{5}{9} = \dfrac{5 \times 2}{9 \times 2} = \dfrac{10}{18}$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 6}{3 \times 6} = \dfrac{12}{18}$

$\dfrac{22}{36} = \dfrac{22 : 2}{36 : 2} = \dfrac{11}{18}$

Or $\dfrac{10}{18} < \dfrac{11}{18} < \dfrac{12}{18} < \dfrac{13}{18}$ donc $\dfrac{5}{9} < \dfrac{22}{36} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{13}{18}$.

4.4 Addition et soustraction

Propriété 28. *Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.*

Autrement dit :
Soient a, b, et c trois nombres avec $c \neq 0$ *et* $a > b$. *Alors :* $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ *et* $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemple 36. $\frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{15}{9} = \frac{3 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{3}$

$\frac{9,7}{12} - \frac{1,7}{12} = \frac{9,7 - 1,7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$

Remarque. Si les dénominateurs ne sont pas les mêmes, on commence par transformer les écritures fractionnaires pour obtenir des fractions de même dénominateur. On appelle cela « réduire au même dénominateur ».

Exemple 37. $\frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{1 \times 2}{6 \times 2} + \frac{5}{12} = \frac{2}{12} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

$\frac{7}{5} - \frac{2}{15} = \frac{7 \times 3}{5 \times 3} - \frac{2}{15} = \frac{21}{15} - \frac{2}{15} = \frac{19}{15}$

4.5 Multiplication

Propriété 29. *Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.*

Autrement dit :
Soient a, b, c et d trois nombres avec $c \neq 0$ *et* $d \neq 0$. *Alors :* $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$

Exemple 38. $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$

$\frac{2,3}{1,5} \times \frac{5}{2} = \frac{2,3 \times 5}{1,5 \times 2} = \frac{11,5}{3} = \frac{115}{30} = \frac{5 \times 23}{5 \times 6} = \frac{23}{6}$

Remarque. Lorsque cela est possible, on a intérêt à simplifier avant d'effectuer les multiplications au numérateur et au dénominateur.

Exemple 39. $\frac{8}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{8 \times 15}{5 \times 16} = \frac{8 \times 3 \times 5}{5 \times 8 \times 2} = \frac{3}{2}$

4.6 Remarques finales et importantes

Remarque 1 :
Vous l'avez vu en sixième, mais c'est fondamental : prendre une fraction de quelque chose se traduit en mathématique par une multiplication.

Exemple 40. Je prends les trois quarts de la moitié d'un gâteau signifie que je prends $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ du gâteau, soit trois huitièmes du gâteau.

Exemple 41. Si tu as donné les cinq sixièmes de tes 24 jeux vidéos, cela signifie que tu as donné $\frac{5}{6} \times 24$ jeux.

$$\frac{5}{6} \times 24 = \frac{5 \times 24}{6} = \frac{5 \times 6 \times 4}{6} = 20$$

Tu as donc donné 20 jeux.

Remarque 2 :
Comme dans l'exemple 21, vous devez maintenant sans problème savoir multiplier une fraction par un entier. En effet, tout entier a peut s'écrire sous forme d'une fraction $\frac{a}{1}$.

Exemple 42. $\frac{7}{8} \times 21 = \frac{7 \times 21}{8} = \frac{147}{8}$

$$\frac{3}{11} \times 66 = \frac{3 \times 66}{11} = \frac{3 \times 11 \times 6}{11} = 18$$

Remarque 3 :
Les règles de priorités vues au premier chapitre restent évidemment valables avec les fractions.

Exemple 43. $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{5 \times 1}{8 \times 2} = \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{6}{16} + \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$

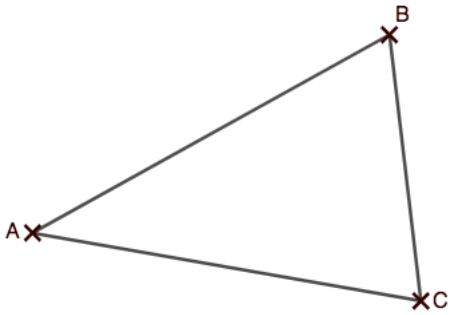
Chapitre 5

Triangles

5.1 Inégalité triangulaire

Propriété 30. *Dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Lorsqu'il y a égalité, les trois points sont alignés.*

Exemple 44. Dans le triangle ABC on a donc : $AB < AC+BC$; $AC < AB+BC$ et $BC < AB+AC$.



Propriété 31. *Si $M \in [AB]$ alors $AB = AM + MB$*
Si $AB = AM + MB$, alors $M \in [AB]$

Remarque. Pour vérifier si l'on peut construire un triangle, il suffit de vérifier que la plus grande longueur est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple 45. Le triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, BC= 5 cm et $AC = 6$ cm est constructible car :
$[AC]$ est le plus grand côté et $AC = 6$ cm.
$AB + BC = 4$ cm + 5 cm = 9 cm > 6 cm.

Exemple 46. Le triangle DEF tel que $DE = 11{,}5$ cm, $DF = 6{,}8$ cm et $EF = 4{,}7$ cm n'est pas constructible car :
$[DE]$ est le plus grand côté et $DE = 11{,}5$ cm.
$DF + EF = 6{,}8$ cm + 4,7 cm = 11,5 cm = DE.
Les trois points D, E et F sont donc alignés.

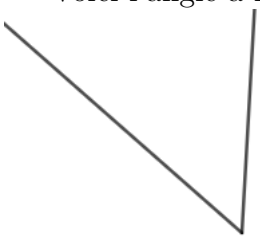
Exemple 47. Le triangle GHI tel que $GH = 6{,}2$ cm, $GI = 3{,}7$ cm et $HI = 10$ cm n'est pas constructible car :
$[HI]$ est le plus long côté et $HI = 10$ cm.
$GH + GI = 6{,}2$ cm + 3,7 cm = 9,9 cm < 10 cm.

5.2 Constructions

5.2.1 Reproduction d'un angle

Pour reproduire un angle, on peut soit utiliser un rapporteur, soit utiliser la règle et le compas :

Voici l'angle à reproduire :



On commence par nommer sur notre modèle le sommet de l'angle (O) et les deux directions (x et y). Toujours sur notre modèle, on choisit un écartement de compas quelconque, et on plante le compas sur O. On trace deux arcs de cercle, un sur $[Ox)$ et un sur $[Oy)$, et on nomme A et B les points d'intersection.
A l'endroit où on veut reproduire l'angle, on trace une demi-droite $[Ox)$ et on trace un arc de cercle de centre O en gardant le même écartement. On prend ensuite l'écartement entre A et B qu'on reporte sur notre figure. On obtient ainsi l'équivalent du point B et on peut finir en traçant $[OB)$.

5.2.2 Construction d'un triangle connaissant les 3 longueurs de ses côtés

Exemple 48. Construire le triangle ABC tel que $AB = 5$ cm ; $BC = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

On trace $[AC]$. On point le compas en A avec un écartement de 5 cm, on fait un arc de cercle. On point ensuite le compas en C avec un écartement de 6 cm et on trace un deuxième arc de cercle. Le point d'intersection des deux arcs de cercle est le point B.

5.2.3 Construction d'un triangle connaissant deux longueurs de côtés et l'angle entre les deux côtés

Exemple 49. Construire le triangle DEF tel que $DE = 4{,}1$ cm ; $DF = 6{,}7$ cm et $\widehat{FDE} = 57^{\circ}$.

On trace $[DF]$, puis la demi-droite d'origine D formant un angle de 57°. On place alors le point E sur la demi-droite tel que $DE = 4{,}1$ cm.

5.2.4 Construction d'un triangle connaissant une longueur de côté et les deux angles aux extrémités du côté

Exemple 50. Construire le triangle GHI tel que $GH = 3{,}4$ cm ; $\widehat{HGI} = 51^o$ et $\widehat{GHI} = 43^o$.

On commence par tracer $[GH]$, puis les deux demi-droites d'origines G et$H$ formant des angles de 51° et 43° avec $[GH]$. Le point d'intersection des deux demi-droites est I.

5.3 Médiatrices et cercle circonscrit

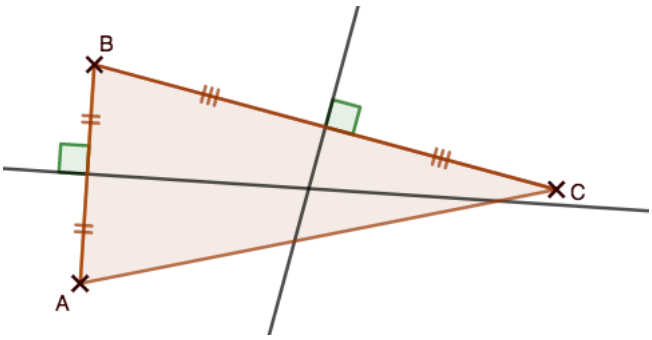
Définition 14. Rappel : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.
C'est aussi l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

Remarque. Pour construire la médiatrice d'un segment, on utilisera toujours la deuxième définition, un compas et une règle.

On choisit un écartement de compas plus grand à vue d'œil que la moitié du segment. On trace deux arcs de cercle de centre A (un de chaque coté du segment) et deux arcs de cercle de centre B (un de chaque coté du segment). On obtient un point d'intersection de chaque coté du segment, et la droite qui les relie est la médiatrice du segment $[AB]$.

Propriété 32. *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration :
Soit ABC un triangle et soit O le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Une médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment, donc, comme O appartient à la médiatrice de $[AB]$, O est équidistant de A et de B, donc $OA = OB$.
De même, comme O appartient à la médiatrice de $[AC]$, $OA = OC$.
On a donc $OA = OB = OC$, donc en particulier $OB = OC$ ce qui signifie que O est équidistant de B et de C, donc que O appartient à la médiatrice de $[BC]$. On a donc bien trouvé un point qui appartient aux trois médiatrices : elles sont concourantes.



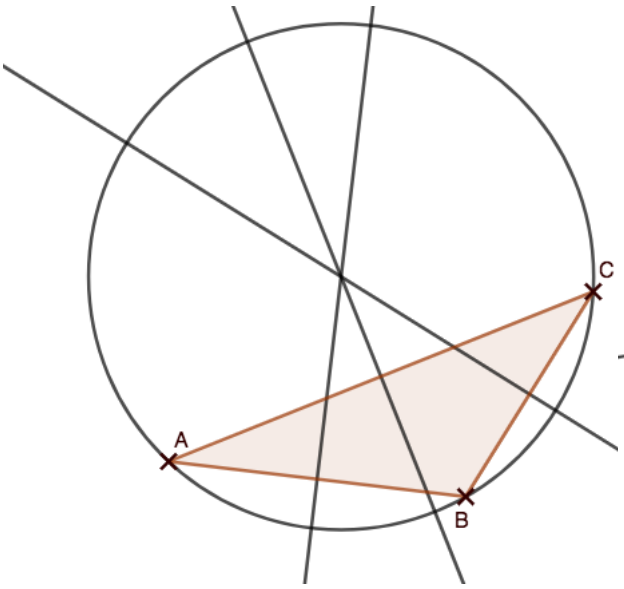
Définition 15. Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

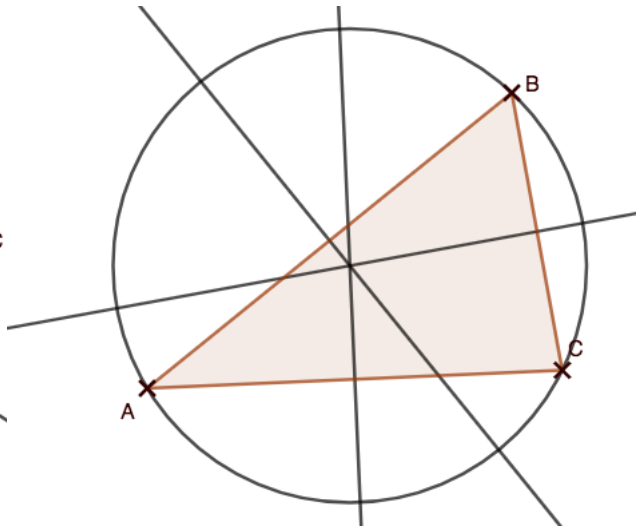
Propriété 33. *Le point d'intersection des trois médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

Démonstration :
En reprenant les notations de la démonstration précédente, on a $OA = OB = OC$, donc les points A, B et C sont bien tous les trois à la même distance du point O, donc ils sont sur un même cercle de centre O.

Remarque. Pour construire le cercle circonscrit à un triangle, on n'a donc besoin de construire que deux médiatrices pour avoir le centre.

Remarque. Le centre du cercle circonscrit à un triangle peut être à l'extérieur du triangle (quand il a un angle obtus).



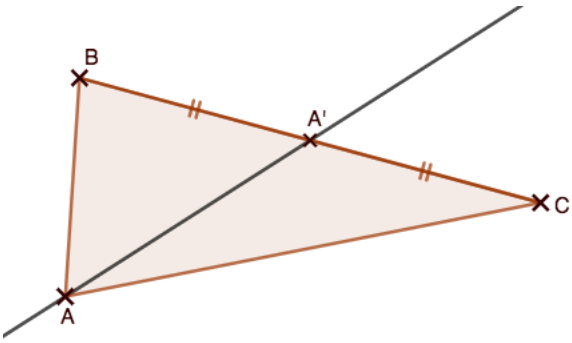


5.4 Médianes, hauteurs et bissectrices

5.4.1 Médianes

Définition 16. Soit ABC un triangle quelconque.
La médiane issue de A (ou passant par A, ou relative à $[BC]$) est la droite qui passe par A et qui coupe le côté opposé, soit $[BC]$, en son milieu.

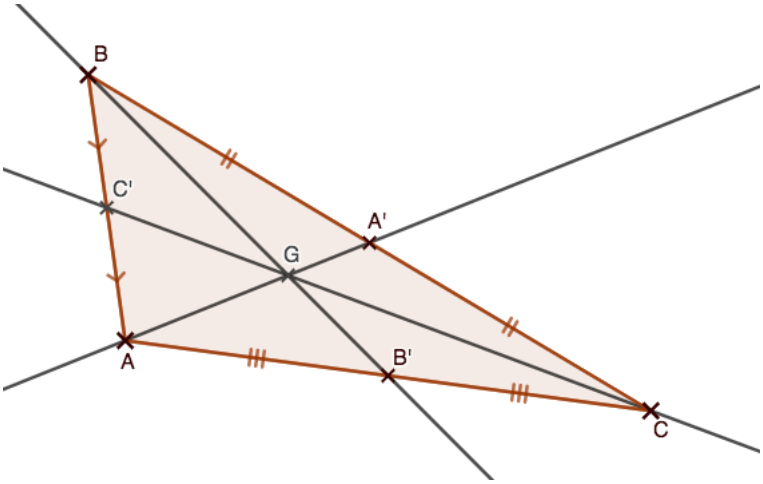
Remarque. A retenir : Une médiane est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé en son milieu.



Propriété 34. *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.*

Définition 17. Le point d'intersection des trois médianes d'un triangle s'appelle le centre de gravité du triangle.

Propriété 35. *Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane (restreinte au triangle) en partant des sommets.*



$$AG = \frac{2}{3} \times AA'$$

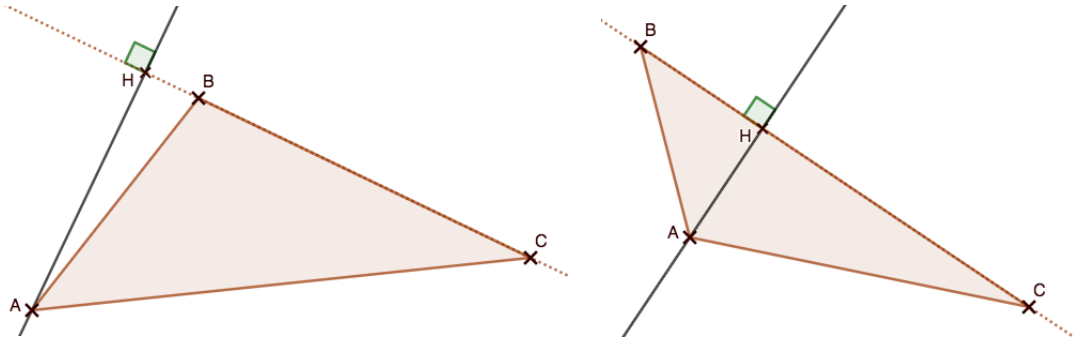
$$BG = \frac{2}{3} \times BB'$$

$$CG = \frac{2}{3} \times CC'$$

5.4.2 Hauteurs

Définition 18. Soit ABC un triangle quelconque.
La hauteur issue de A est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire au support du côté opposé, c'est-à-dire (BC).

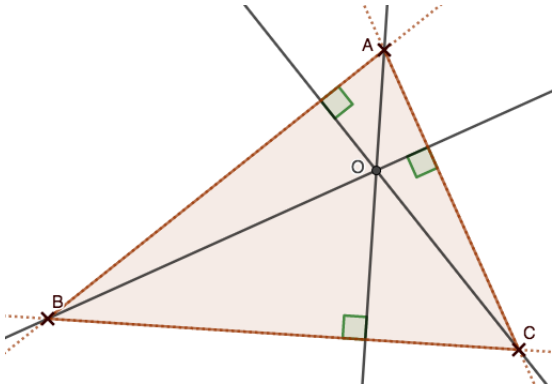
Remarque. A retenir : Une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au support du côté opposé. La hauteur peut parfois être à l'extérieur du triangle (s'il a un angle obtus).

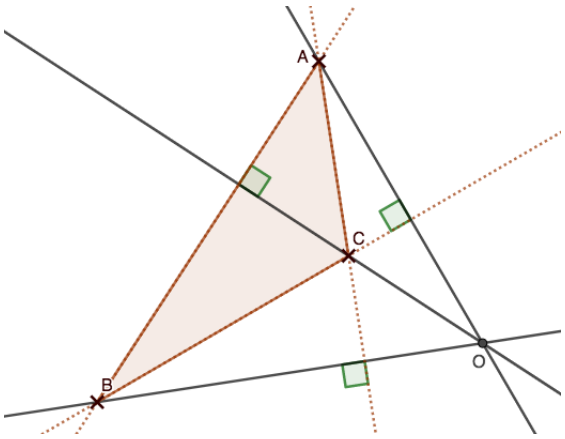


Propriété 36. *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Définition 19. Le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle s'appelle l'orthocentre.

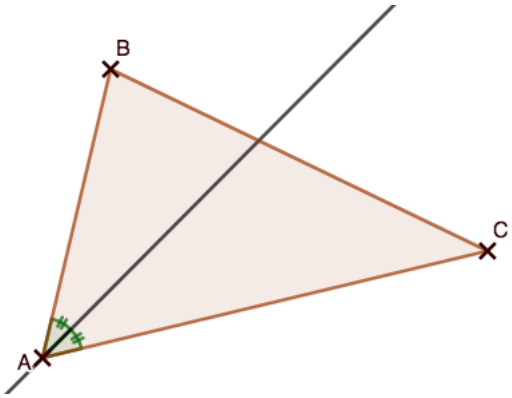
Remarque. L'orthocentre n'est pas forcément à l'intérieur du triangle.





5.4.3 Bissectrices

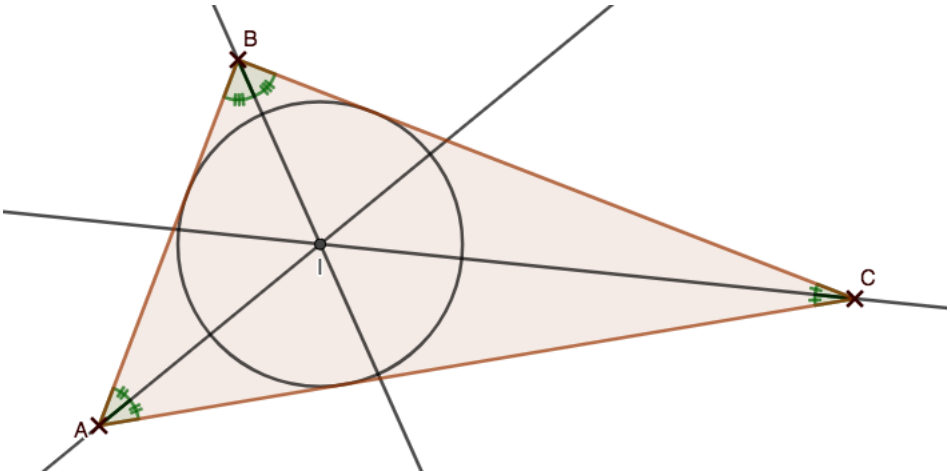
Définition 20. Rappel : la bissectrice d'un angle est la droite qui sépare cet angle en deux angles de même mesure.



Propriété 37. *Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.*

Définition 21. Le cercle inscrit d'un triangle est le cercle qui touche chaque côté du triangle en étant complètement à l'intérieur du triangle.

Propriété 38. *Le point d'intersection des trois bissectrices d'un triangle est le centre du cercle inscrit du triangle.*



Chapitre 6

Calcul littéral

6.1 Simplification d'écriture

Une expression littérale est une expression avec une ou plusieurs lettres (plusieurs fois la même ou plusieurs lettres différentes). La lettre est alors une variable.

Exemple 51.
$A = x + y$ $\quad$ A est la somme de x et de y
$B = x \times y$ $\quad$ B est le produit de x et de y.

Remarque. Il est important de bien faire la distinction entre la lettre x et le symbole de la multiplication $\times$. Il faut donc désormais bien écrire en écriture cursive les x que vous allez rencontrer en calcul littéral.

Notations
Afin de simplifier l'écriture des expressions littérales, il a été décidé de supprimer le symbole $\times$ devant une lettre ou devant une parenthèse.
Quand une variable est multipliée par elle-même, on dit qu'elle est mise au carré et on note : $x \times x = x^2$.
De même, $x \times x \times x = x^3$.

Exemple 52.
$A = (3x - 4)(2x + 7)$ est la forme simplifiée de l'expression suivante : $A = (3 \times x - 4) \times (2 \times x + 7)$.
$B = 6x^2 + 13x - 28$ est la forme simplifiée de l'expression suivante : $B = 6 \times x \times x + 13 \times x - 28$.
$C = 7x(8y + 3)$ est la forme simplifiée de l'expression suivante : $C = 7 \times x \times (8 \times y + 3)$.
$D = 56xy + 21x$ est la forme simplifiée de l'expression suivante : $D = 56 \times x \times y + 21 \times x$.

6.2 Utiliser et produire une expression littérale

L'énoncé peut demander de calculer l'expression pour certaines valeurs de la variable. Attention à bien respecter les règles de priorité : les multiplications et les divisions sont toujours prioritaires sur les additions et les soustractions.

Exemple 53. Soit l'expression suivante : $A = 9x^2 - 5x + 6$. On veut calculer A pour $x = 4$.

$A = 9x^2 - 5x + 6$
$A = 9 \times 4^2 - 5 \times 4 + 6$
$A = 9 \times 16 - 20 + 6$
$A = 144 - 20 + 6$
$A = 124 + 6$
$A = 130$

Exemple 54. Soit l'expression suivante : $B = (3x + 1)(7x - 2)$. On veut calculer B pour $x = \dfrac{1}{2}$.

$B = (3x+1)(7x-4)$

$B = \left(3 \times \frac{1}{2} + 1\right)\left(\times \frac{1}{2} - 2\right)$

$B = \left(\frac{3}{2} + 1\right)\left(\frac{7}{2} - 2\right)$

$B = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2}\right)\left(\frac{7}{2} - \frac{4}{2}\right)$

$B = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2}$

$B = \frac{15}{4}$

Dans un programme de calcul, il faudra obtenir l'expression littérale à l'aide des indications de l'énoncé.
Rappel de vocabulaire : les verbes soustraire, ôter, retrancher, enlever sont synonymes.

Exemple 55. On donne le programme de calcul suivant :
• Choisir un nombre.
• Additionner deux à ce nombre.
• Multiplier le résultat par quatre.
• Ôter un au résultat.
• Diviser le résultat obtenu par 2.

1. Effectuer le programme de calcul en prenant 1 comme nombre de départ.
2. Écrire l'expression obtenue en prenant x comme nombre de départ.
3. Calculer la valeur de l'expression précédente pour $x = 3$.

1. • 1
   • $1 + 2 = 3$
   • $3 \times 4 = 12$
   • $12 - 1 = 11$
   • $11 : 2 = 5,5$
2. $[(x+2) \times 4 - 1] : 2$
3. $[(3+2) \times 4 - 1] : 2 = (5 \times 4 - 1) : 2 = (20 - 1) : 2 = 19 : 2 = 9,5$. Si $x = 3$, on obtient 9,5.

6.3 Tester une égalité

Une égalité est composée de deux membres, le membre de gauche et le membre de droite, séparés par le signe =. Ici, il y a une ou plusieurs lettres dans l'égalité, parfois de chaque côté du signe =. Une égalité peut être vraie ou fausse suivant les valeurs prises par la ou les variable(s).

Pour tester une égalité, il faut absolument séparer les calculs de chacun des membres.

Exemple 56. L'égalité $2(x+3) = 2x+5$ est-elle vraie pour $x = 4$?

D'une part : $2(x+3) = 2 \times (4+3) = 2 \times 7 = 14$

D'autre part : $2x + 5 = 2 \times 4 + 5 = 8 + 5 = 13$

$13 \neq 14$ donc l'égalité est fausse pour $x = 4$.

Exemple 57. On considère l'égalité $(2x+3)(3x-1) = 6x^2 + 7x - 3$.

1. L'égalité est-elle vraie pour $x = 3$?
2. L'égalité est-elle vraie pour $x = \frac{1}{2}$?
3. Peut-on en déduire que l'égalité est vraie pour toute valeur de x ?

1. D'une part : $(2x+3)(3x-1) = (2\times 3+3)(3\times 3-1) = (6+3)\times(9-1) = 9\times 8 = 72$
   D'autre part : $6x^2+7x-3 = 6\times 3^2+7\times 3-3 = 6\times 9+21-3 = 54+21-3 = 75-3 = 72$
   $72 = 72$ donc l'égalité est vraie pour $x = 3$.
2. D'une part : $(2x+3)(3x-1) = \left(2\times\frac{1}{2}+3\right)\left(3\times\frac{1}{2}-1\right) = (1+3)\left(\frac{3}{2}-1\right) = 4\times\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\right) = 4\times\frac{1}{2} = 2$
   D'autre part : $6x^2+7x-3 = 6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{2}-3 = 6\times\frac{1}{4}+\frac{7}{2}-3 = \frac{3}{2}+\frac{7}{2}-3 = \frac{10}{2}-3 = 5-3 = 2$
   $2 = 2$ donc l'égalité est vraie pour $x = \frac{1}{2}$.
3. On a montré que l'égalité est vraie pour $x = 3$ et $x = \frac{1}{2}$. Mais cela ne prouve pas que l'égalité est toujours vraie. On pourrait même montrer que l'égalité est vraie pour beaucoup d'autres valeurs de x, cela ne prouverait toujours pas la généralité. La seule possibilité de montrer que l'égalité est toujours vraie sera d'utiliser les propriétés de calcul littéral que vous verrez par la suite (et pour cet exemple-là, l'année prochaine).

6.4 Distributivité et simplification d'écriture

Propriété 39.
Rappel (c'est la propriété 5.) : Pour tous nombres k, a et b, on a : $k\times(a+b) = k\times a + k\times b$.

Définition 22. Rappel (c'est la définition 2.) : Développer, c'est transformer un produit en somme.

Exemple 58. $4(x+5) = 4\times x + 4\times 5 = 4x+20$
$2x(8-7x) = 2x\times 8 - 2x\times 7x = 16x - 14x^2$
$x(y+1) = xy + x$

Définition 23. Rappel (c'est la définition 3.) : Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Exemple 59. $6x - 12 = 6\times x - 6\times 2 = 6(x-2)$
$64 - 8a = 8\times 8 - 8\times a = 8(8-a)$
$25x + 5 = 5\times 5x + 5\times 1 = 5(5x+1)$

Remarque. Il faut arriver à ne plus faire d'étapes quand on développe ou on factorise ce genre d'expressions. Il faut toujours avoir en tête que cela va se compliquer avec les prochains chapitres, cette année ou l'année prochaine, et que les étapes vont alourdir le travail.

Chapitre 7

Nombres relatifs - partie 1

7.1 Vocabulaire et comparaison

7.1.1 Première approche

Les nombres relatifs interviennent dans la vie courante : panneau de commande des ascenseurs, températures positives et négatives, par exemple.

Définition 24. Un nombre relatif positif est un nombre qui s'écrit avec le signe + ou sans signe.
Un nombre relatif négatif est un nombre qui s'écrit avec le signe –.

Remarque. 0 (zéro) est le seul nombre à la fois positif et négatif.

Définition 25. La distance à zéro d'un nombre relatif est le nombre sans son signe.

Exemple 60. $+5,7$ est un nombre relatif positif dont la distance à zéro est $5,7$.
-14 est un nombre relatif négatif dont la distance à zéro est 14.
$7,8$ est un nombre relatif positif dont la distance à zéro est $7,8$.
$-0,4$ est un nombre relatif négatif dont la distance à zéro est $0,4$.

7.1.2 Opposé

Définition 26. Deux nombres relatifs qui ne diffèrent que par leur signe sont opposés.

Conséquence :
Deux nombres opposés ont la même distance à zéro.

Exemple 61. $+1235$ est l'opposé de -1235.
$-0,03$ est l'opposé de $0,03$.
$34,5$ est l'opposé de $-34,5$.

7.1.3 Comparaison

Propriété 40. *Deux nombres relatifs positifs sont rangés dans l'ordre de leur distance à zéro.*

Exemple 62. $+5 < +9$

Propriété 41. *Tout nombre relatif négatif est inférieur à tout nombre relatif positif.*

Exemple 63. $-3 < +8$

Propriété 42. *Deux nombres relatifs négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.*

Exemple 64. $-9,9 < -7,7$ car $9,9 > 7,7$

7.2 Graphiquement

7.2.1 Sur une droite

Définition 27. Tout point d'une droite graduée est repéré par un nombre relatif appelé son abscisse.

Exemple 65.

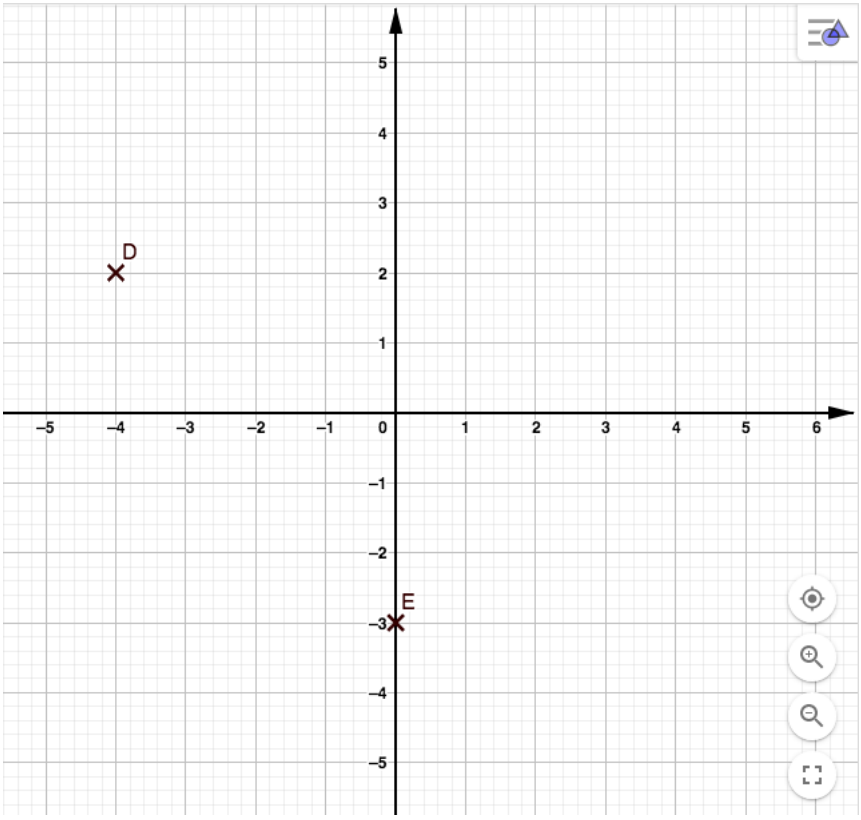
A a pour abscisse $-0,3$. On note $A(-0,3)$.

Propriété 43. *Sur une droite graduée, la distance à zéro d'un nombre relatif correspond à la distance entre l'origine et le point qui a pour abscisse ce nombre.*

7.2.2 Dans un plan

Définition 28. Dans un plan muni d'un repère, tout point est repéré par un couple de nombres relatifs appelé ses coordonnées : le premier nombre est l'abscisse et le second est l'ordonnée.

Exemple 66. Lire les coordonnées des points D et E et placer les points $F(5;-3)$, $G(-4;0)$ et $H(-2;-4)$.



Chapitre 8

Angles

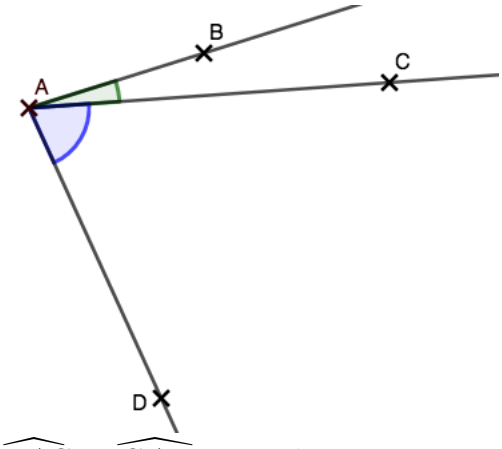
8.1 Vocabulaire

8.1.1 Rappels

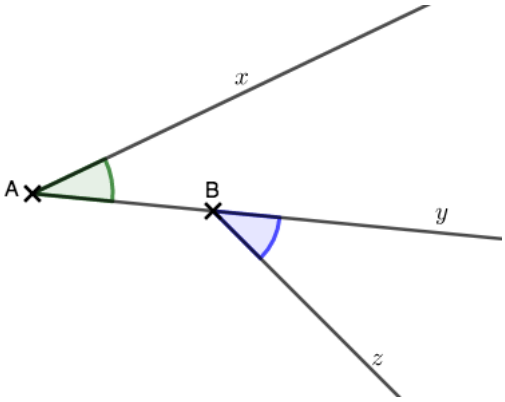
Définition 29. Un angle nul a pour mesure 0°.
Un angle aigu a une mesure strictement comprise entre 0° et 90°.
Un angle droit a pour mesure 90°.
Un angle obtus a une mesure strictement comprise entre 90° et 180°.
Un angle plat a pour mesure 180°.

8.1.2 Angles adjacents

Définition 30. Deux angles sont adjacents lorsqu'ils ont le même sommet, un côté commun et lorsqu'ils sont situés de part et d'autre de leur côté commun.



$\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont adjacents.

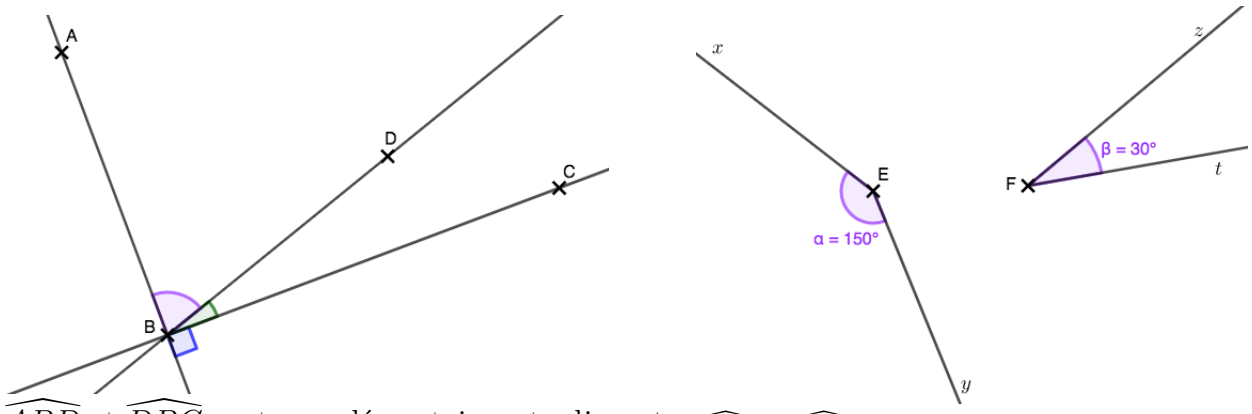


$\widehat{xAy}$ et $\widehat{yBz}$ ne sont pas adjacents.

8.1.3 Angles complémentaires, angles supplémentaires

Définition 31. Lorsque la somme des mesures de deux angles est égale à 90°, on dit que ces deux angles sont complémentaires.

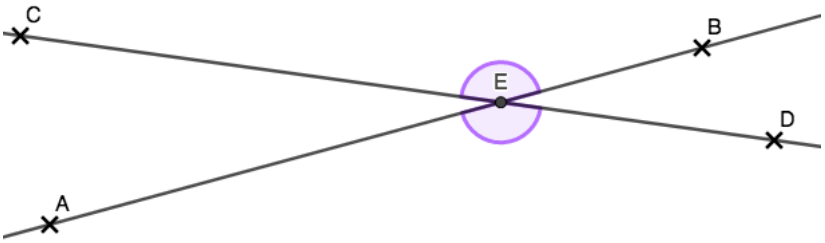
Définition 32. Lorsque la somme des mesures deux angles est égale à 180°, on dit que ces deux angles sont supplémentaires.



$\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$ sont complémentaires et adjacents. $\widehat{xEy}$ et $\widehat{zFt}$ sont supplémentaires.

8.1.4 Angles opposés par le sommet

Définition 33. Deux angles sont opposés par le sommet quand ils ont le même sommet et quand ils ont leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre.



$\widehat{CEB}$ et $\widehat{AED}$ sont opposés par le sommet.
$\widehat{CEA}$ et $\widehat{BED}$ sont opposés par le sommet.

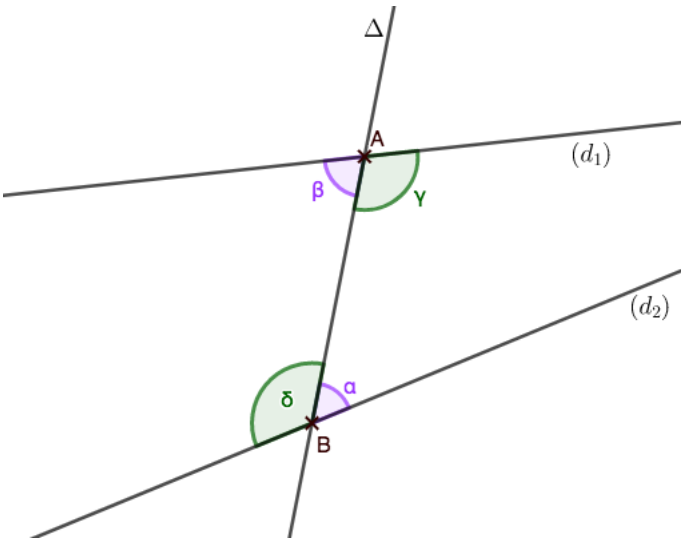
Propriété 44. *Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.*

Exemple 67. Avec la figure précédente, on a : mes $\widehat{CEB}$ = mes $\widehat{AED}$ et mes $\widehat{CEA}$ = mes $\widehat{BED}$.
On écrira plutôt : $\widehat{CEB} = \widehat{AED}$ et $\widehat{CEA} = \widehat{BED}$.

Démonstration :
Avec les notations de la figure précédente, on sait que $\widehat{CED}$ et $\widehat{AEB}$ sont des angles plats.
On a donc $\widehat{CED} = \widehat{CEB} + \widehat{BED} = 180^o$ et $\widehat{AEB} = \widehat{AED} + \widehat{DEB} = 180^o$.
Ainsi : $\widehat{CEB} + \widehat{BED} = \widehat{AED} + \widehat{DEB}$.
On retranche $\widehat{BED}$ de chaque côté de l'égalité : $\widehat{CEB} = \widehat{AED}$

8.1.5 Angles alternes-internes

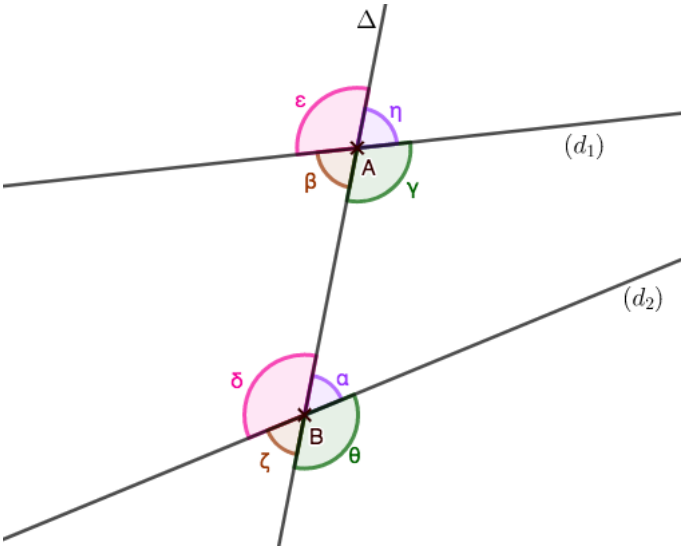
Définition 34. On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées en A et en B par une sécante Δ. Un angle de sommet A et un angle de sommet B sont alternes-internes quand ils sont situés de part et d'autre de la sécante Δ et entre les droites (d_1) et (d_2).



Les angles α et β sont alternes-internes.
Les angles γ et δ sont alternes-internes.

8.1.6 Angles correspondants

Définition 35. On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées en A et en B par une sécante Δ. Un angle de sommet A et un angle de sommet B sont correspondants quand ils sont situés du même côté de la sécante Δ, avec l'un entre les droites (d_1) et (d_2) et pas l'autre.

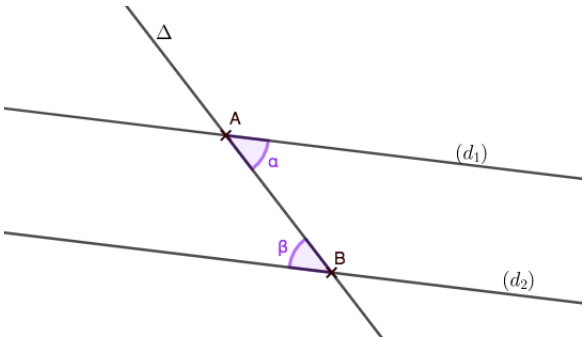


Les angles α et η sont correspondants.
Les angles γ et θ sont correspondants.
Les angles δ et ϵ sont correspondants.
Les angles β et ζ sont correspondants.

8.2 Caractérisation angulaire du parallélisme

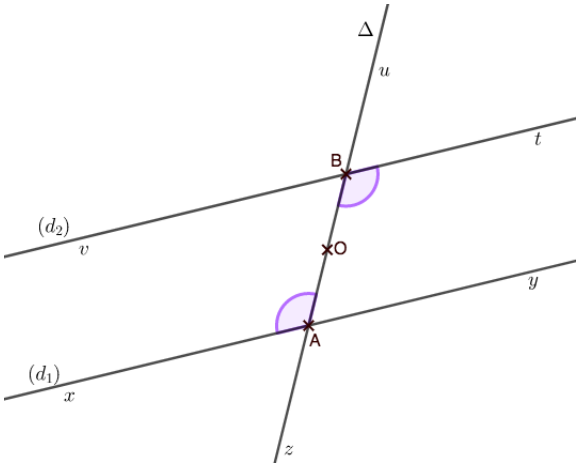
Propriété 45. *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes qu'elles déterminent ont la même mesure.*

Exemple 68.



Si les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors les angles α et β, qui sont alternes-internes, sont de même mesure.

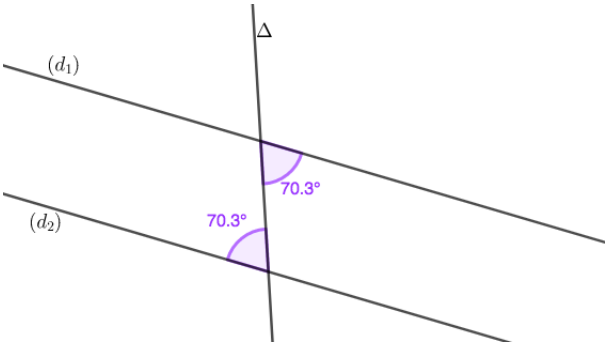
Démonstration :



On appelle O le milieu de $[AB]$. B est donc l'image de A par la symétrie de centre O.
La demi-droite $[AO)$ a pour image la demi-droite $[BO)$ par la symétrie de centre O.
La demi-droite $[Ax)$ a pour image la demi-droite $[Bt)$ par la symétrie de centre O.
Ainsi, l'angle $\widehat{uAx}$ a pour image l'angle $\widehat{zBt}$ par la symétrie de centre O. Or la symétrie conserve les mesures des angles, donc les angles $\widehat{uAx}$ et $\widehat{zBt}$, qui sont alternes-internes, ont la même mesure.

Propriété 46. *Réciproquement, si deux droites coupées par une sécante déterminent deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.*

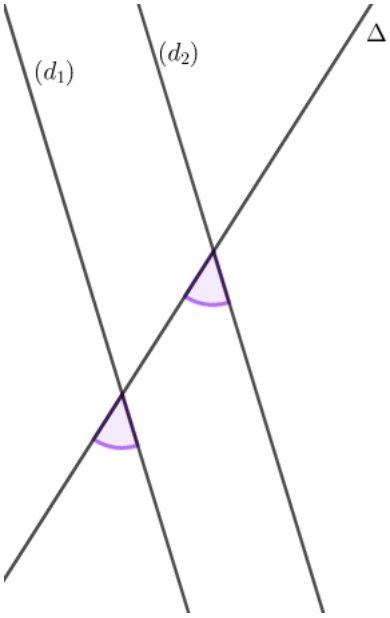
Exemple 69.



Les deux angles indiqués sur la figure ont la même mesure et sont des angles alternes-internes, donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

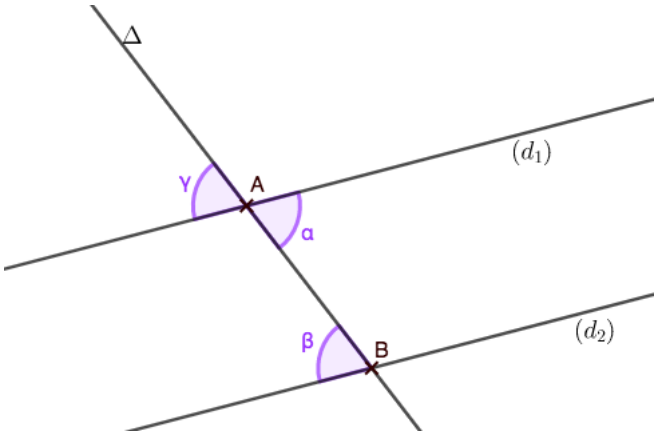
Propriété 47. *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants qu'elles déterminent ont la même mesure.*

Exemple 70.



Si (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors les deux angles marqués sur la figure, qui sont correspondants, ont la même mesure.

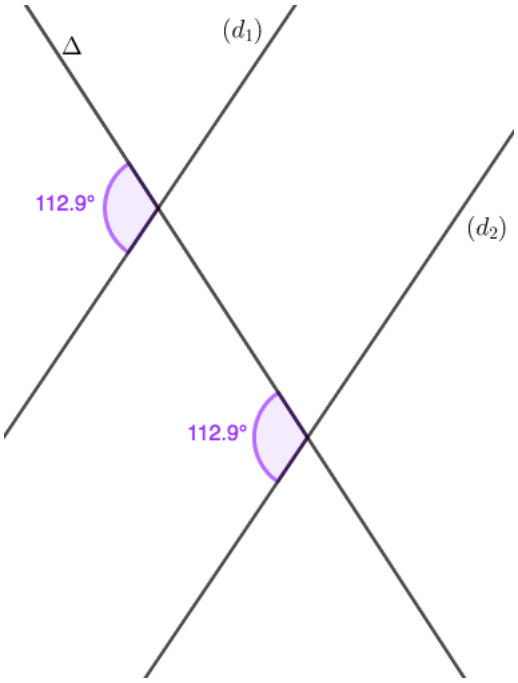
Démonstration :



Les angles α et γ sont opposés par le sommet, donc ils ont la même mesure.
On sait que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, donc les angles α et β qui sont alternes-internes ont la même mesure.
Les angles γ et β (qui sont correspondants) ont donc la même mesure.

Propriété 48. *(admise) Réciproquement, si deux droites coupées par une sécante déterminent deux angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.*

Exemple 71.

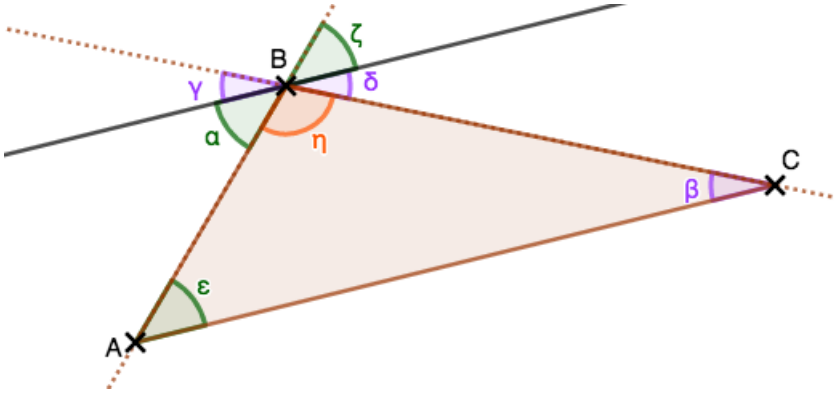


Les deux angles notés sur la figure sont correspondants et de même mesure, donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

8.3 Somme des angles d'un triangle

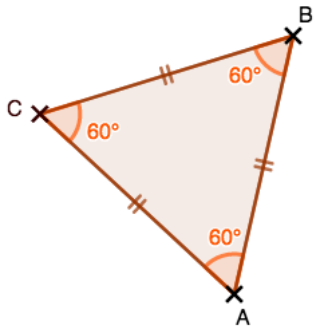
Propriété 49. *La somme des mesures des trois angles d'un triangle est toujours égale à 180°.*

Démonstration :

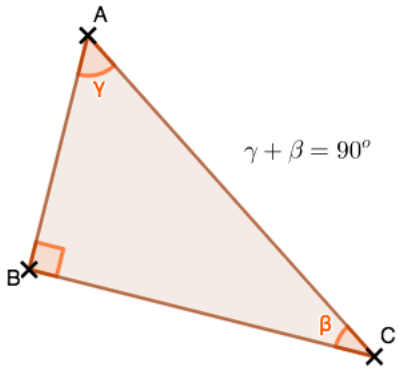


Soit ABC un triangle quelconque. On trace la parallèle à (AC) passant par B, et on prolonge les côtés (AB) et (BC) de manière à nommer les angles comme dans la figure ci-dessus.
Les angles ϵ et ζ sont deux angles correspondants définis par deux droites parallèles, donc $\epsilon = \zeta$.
De même $\beta = \gamma$.
De plus les angles α et ζ sont opposés par le sommet, donc égaux : $\alpha = \zeta$ donc $\epsilon = \alpha$.
De même $\gamma = \delta = \beta$.
Ainsi, la somme des trois angles du triangle ABC, ie $\eta + \epsilon + \beta$, est égal à $\eta + \alpha + \delta$. Ces trois angles forment un angle plat, donc $\eta + \alpha + \delta = 180°$, ce qui prouve bien que la somme des trois angles du triangle ABC est égale à 180°.

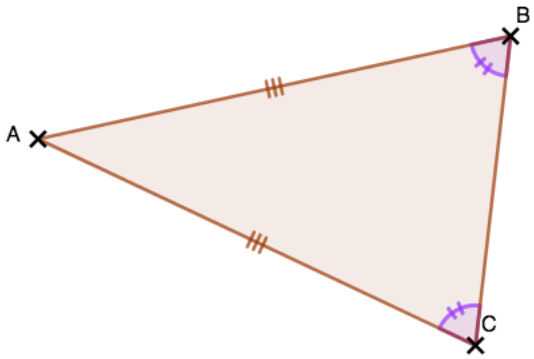
Propriété 50. *Un triangle équilatéral a ses trois angles qui mesurent 60°.*



Propriété 51. *Un triangle rectangle a ses deux angles aigus complémentaires.*



Propriété 52. *Un triangle isocèle a ses deux angles à la base de même mesure.*



Exemple 72. ABC est un triangle isocèle en A avec $\widehat{BAC} = 53^o$. On veut calculer $\widehat{ABC}$.

ABC est un triangle isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
La somme des angles d'un triangle est égale à 180°, donc $180^o = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC}$
Ainsi : $180^o = 2 \times \widehat{ABC} + 53^o$.
On soustrait 53° de chaque côté : $2 \times \widehat{ABC} = 180^o - 53^o$, soit $2 \times \widehat{ABC} = 127^o$.
On divise par deux : $\widehat{ABC} = 127^o : 2$ donc l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 63,5°.

Chapitre 9

Nombres relatifs partie 2

9.1 Somme et différence

9.1.1 Somme

Propriété 53. *Pour additionner deux nombres relatifs de même signe, on additionne leurs distances à zéro et on garde le signe commun.*
Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires, on soustrait leurs distances à zéro et on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro.

Exemple 73. $A = (-2) + (-3) = -(2 + 3) = -5$
$B = (-5) + (+7) = +(7 - 5) = +2$
$C = (+12) + (-15) = -(15 - 12) = -3$

9.1.2 Différence

Propriété 54. *Soustraire un nombre relatif revient à additionner son opposé.*

Exemple 74. $D = (-2) - (-3) = (-2) + (+3) = +(3 - 2) = +1$
$E = (+5) - (-6) = (+5) + (+6) = +(5 + 6) = +11$
$F = (-4) - (+7) = (-4) + (-7) = -(4 + 7) = -11$
$G = (+1) - (+5) = (+1) + (-5) = -(5 - 1) = -4$

Propriété 55. *Pour calculer la distance entre deux points sur une droite graduée, on effectue la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite abscisse.*

Exemple 75. Calculons la distance entre le point B d'abscisse $+4$ et le point C d'abscisse -7 :
$+4 > -7$
$BC = (+4) - (-7)$
$BC = (+4) + (+7)$
$BC = 11$

9.2 Calculs complexes

9.2.1 Calculs enchaînés

Lorsque l'on a une expression complexe à calculer, on peut effectuer les calculs de gauche à droite, ou regrouper astucieusement. Avant de commencer les calculs, on transforme les soustractions en additions en utilisant la propriété 54.

Attention, il faut toujours déplacer chaque nombre avec son signe devant !

Exemple 76. Calculons l'expression suivante en effectuant les calculs de gauche à droite.
$H = (+4) + (-5) - (-8)$
$H = (+4) + (-5) + (+8)$
$H = (-1) + (+8)$
$H = +7$

Exemple 77. Calculons l'expression suivante en regroupant les nombres positifs d'une part et les nombres négatifs d'autre part.
$I = (-8) + (+31) + (-50) - (-7)$
$I = (-8) + (+31) + (-50) + (+7)$
$I = (+31) + (+7) + (-8) + (-50)$
$I = (+38) + (-58)$
$I = -20$

9.2.2 Simplification d'écriture

Propriété 56. *Dans une suite d'additions de nombres relatifs, on peut supprimer les signes d'addition et les parenthèses autour d'un nombre.*
Un nombre positif écrit en début de calcul peut s'écrire sans son signe.

Exemple 78. Effectuons les calculs suivants :

$K = -7 - 2 = -11$
$L = -4 + 9 = 5$
$M = 23 - 32 = -9$
$N = 4,1 - (-2) = 4,1 + 2 = 6,1$
$P = -2 + 7 = 5$

$Q = -8 + 31 - 50 - (-7)$
$Q = -8 + 31 - 50 + 7$
$Q = -8 - 50 + 31 + 7$
$Q = -58 + 38$
$Q = -20$

9.2.3 Programme de calcul

Exemple 79. On donne le programme de calcul suivant :
- Choisir un nombre.
- Ajouter 8.
- Soustraire le tout à 3.

1. Quel nombre obtient-on si on choisit 2 au départ ?
   $3 - (2 + 8) = 3 - 10 = -7$
   Si le nombre de départ est 2, on obtient donc -7.
2. Quel nombre obtient-on si on choisit -15 au départ ?
   $3 - (-15 + 8) = 3 - (-7) = 3 + 7 = 10$
   Si le nombre de départ est -15, on obtient donc 10.

9.2.4 Et avec des fractions, du calcul littéral et des priorités...

Exemple 80. Soit l'expression $A = (7 - 3x) - (1 - 7x)$. Calculons A pour $x = \frac{11}{2}$.

$A = (7 - 3x) - (1 - 7x)$
$A = \left(7 - 3 \times \frac{11}{2}\right) - \left(1 - 7 \times \frac{11}{2}\right)$
$A = \left(7 - \frac{33}{2}\right) - \left(1 - \frac{77}{2}\right)$

$A = \left(\frac{14}{2} - \frac{33}{2}\right) - \left(\frac{2}{2} - \frac{77}{2}\right)$
$A = \frac{-19}{2} - \frac{-75}{2}$
$A = \frac{-19 - (-75)}{2}$

$A = \frac{-19 + 75}{2}$
$A = \frac{56}{2}$
$A = 28$

Chapitre 10

Grandeurs et mesures

10.1 Durées

L'unité de référence est la seconde, noté s.

Exemple 81. 1 $jour = 24$ $heures$ 1 année $\approx$ 365 jours
1 $h = 3\ 600$ s 1 $min = \frac{1}{60}$ h 1 $s = \frac{1}{3\ 600}$ h donc 23 $s = \frac{23}{3\ 600}$ h

43 $min = 2580$ s 2 h 12 $min = 2,2$ $h = 7920$ s

Remarque. Il faut en particulier savoir passer des heures/minutes/secondes aux heures décimales. En particulier : 30 $min = \frac{30}{60}$ $h = 0,5$ h 15 $min = \frac{15}{60}$ $h = 0,25$ h 45 $min = \frac{45}{60}$ $h = 0,75$ h

6 $min = 0,1$ h 12 $min = 0,2$ h 18 $min = 0,3$ h 24 $min = 0,4$ h

36 $min = 0,6$ h 42 $min = 0,7$ h 48 $min = 0,8$ h 54 $min = 0,9$ h

Exemple 82. On veut calculer la durée de trajet d'un train qui part à 13 h 43 min et qui arrive à 16 h 31 min.

La méthode la plus simple consiste à décomposer la durée du trajet.
de 13 h 43 min jusqu'à 14 h : 17 min
de 14 h jusqu'à 16 h 31 min : 2 h 31 min
Il reste juste à additionner 17 min et 2 h 31 min, soit un total de 2 h 48 min.

10.2 Masses

L'unité de référence est le kilogramme, noté kg.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Remarque. 1 tonne (1 t) = 1 000 kg
1 quintal (1 q) = 100 kg
1 microgramme = 0,000001 g

Exemple 83. 23 $g = 0,023$ kg 0,56 $kg = 560$ g 45,1 $dag = 0,451$ kg

10.3 Longueurs

10.3.1 Unités de longueur

L'unité de référence est le mètre, noté m.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm			μm

Exemple 84. $32,5\ \mu m = 0,000\ 032\ 5\ m$
$152,3\ hm = 15\ 230\ mm$
$0,006\ 4\ km = 6,4\ m$
$1\ km = 100\ 000\ cm$

10.3.2 Formules à connaître

Le périmètre d'un carré de longueur de côté c est : $\mathscr{P} = 4c$

Le périmètre d'un rectangle de longueur l et de largeur L est : $\mathscr{P} = 2(L + l)$

Le périmètre (on dit aussi circonférence) d'un cercle de rayon R est : $\mathscr{P} = 2\pi R$

Le périmètre d'une figure complexe s'obtient en additionnant les longueurs du contour de la figure.

10.4 Aires

10.4.1 Unités d'aire

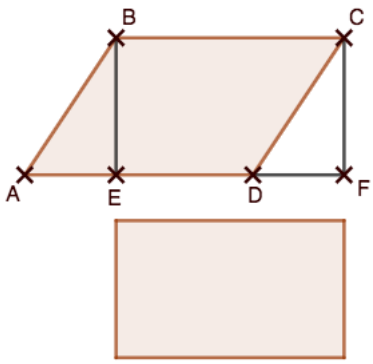
Attention, le tableau de conversion pour les aires comporte deux colonnes par unité :

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	

On peut aussi parfois utiliser les unités agraires :
hectare, noté ha : $1\ ha = 1\ hm^2 = 10\ 000\ m^2$
are, noté a : $1\ a = 100\ m^2 = 1\ dam^2$ $\qquad 1\ ha = 100\ a$

Exemple 85. $18\ km^2 = 18\ 000\ 000\ m^2$ $\qquad 34,2\ dm^2 = 0,342\ m^2 = 3\ 420\ cm^2$

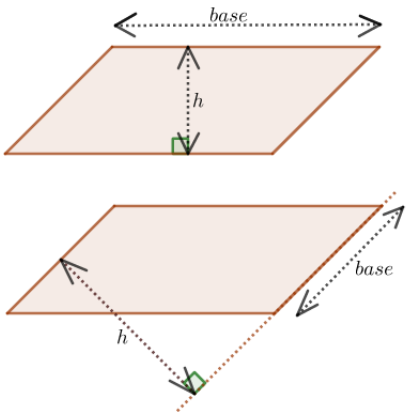
10.4.2 Aire d'un parallélogramme



Pour déterminer l'aire du parallélogramme $ABCD$, on « découpe » le triangle rectangle ABE qu'on « recolle » sur le côté $[DC]$: les triangles ABE et CDF sont identiques.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est donc égale à l'aire du rectangle $BCFE$ que l'on calcule en faisant $BE \times BE$.

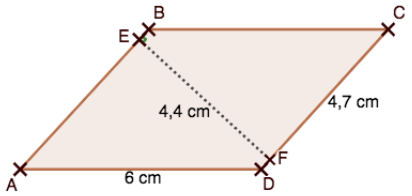
Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, il faut donc connaître la longueur d'un côté et la distance séparant ce côté de son côté opposé, ce qu'on appelle la hauteur relative à ce côté.



L'aire d'un parallélogramme se calcule donc en multipliant une des bases par la hauteur associée :

$$\mathscr{A}_{parallélogramme} = base \times h$$

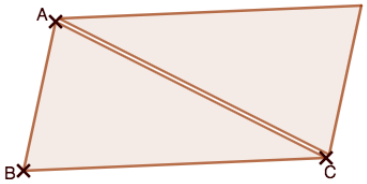
Exemple 86. Déterminons l'aire du parallélogramme $ABCD$ ci-dessous :



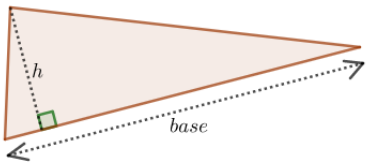
$$\mathscr{A}_{ABCD} = CD \times EF = 4,7 \times 4,4 = 20,68$$

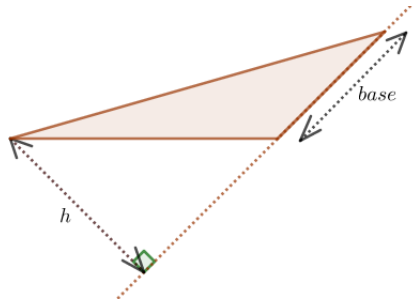
$ABCD$ a une aire de 20,68 cm^2.

10.4.3 Aire d'un triangle



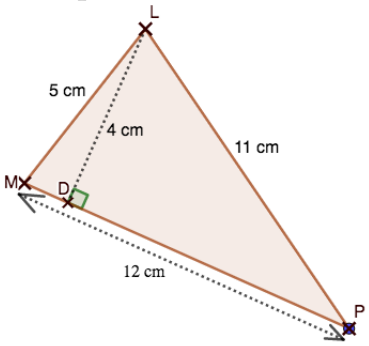
Pour déterminer l'aire du triangle ABC, on remarque qu'on peut obtenir un parallélogramme en reproduisant le triangle « à l'envers ».
On obtient donc l'aire d'un triangle en multipliant une base par la hauteur associée et en divisant par deux.





$$\mathscr{A}_{triangle} = \frac{base \times h}{2}$$

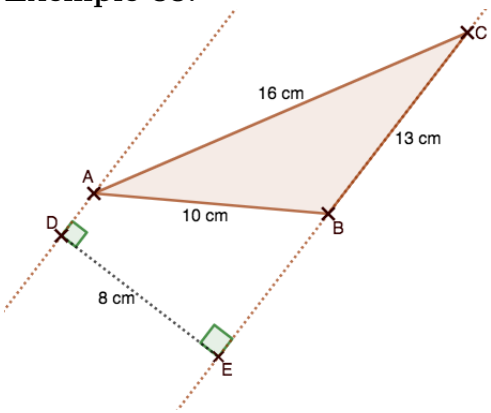
Exemple 87.



$$\mathscr{A}_{LMP} = \frac{MP \times LD}{2} = \frac{12 \times 4}{2} = 24$$

Le triangle MNP a une aire de 24 cm^2.

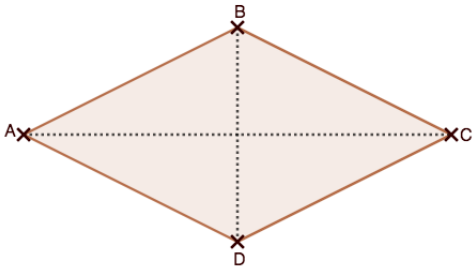
Exemple 88.



$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \times DE}{2} = \frac{13 \times 8}{2} = 52$$

Le triangle ABC a une aire de 52 cm^2.

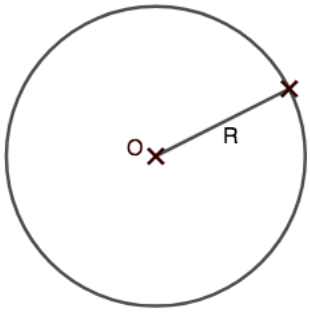
Conséquence : aire du losange



$$\mathscr{A}_{losange} = \frac{diagonale1 \times diagonale2}{2}$$

$$\mathscr{A}_{losange} = \frac{AC \times BD}{2}$$

10.4.4 Aire du disque



L'aire d'un disque s'obtient en multipliant le nombre π par le carré du rayon du disque.

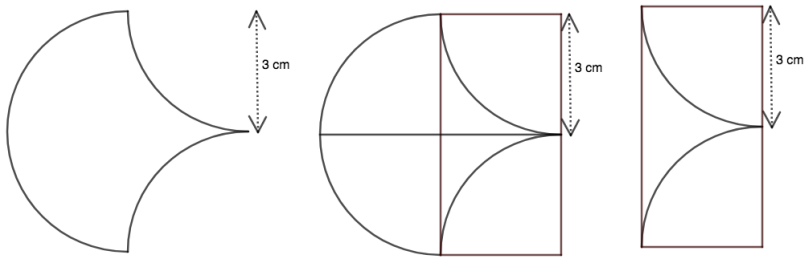
$\mathscr{A}_{disque} = \pi \times R^2$ ou $\mathscr{A}_{disque} = \pi R^2$

Exemple 89. Calculons l'aire d'un disque de 3 cm de rayon.
$\mathscr{A} = \pi \times 3^2 = \pi \times 9 = 9\pi$.
L'aire exacte de ce disque est 9π cm^2.
On peut obtenir une valeur approchée de l'aire du disque en utilisant la touche π de la calculatrice, on obtient 28,274... Une valeur approchée au centième de l'aire du disque est $28,27$ cm^2.

10.4.5 Décomposition de surfaces complexes

Quand on doit calculer l'aire d'une figure complexe, il faut la décomposer en figures simples, ou imaginer « découper » et « recoller » des morceaux.

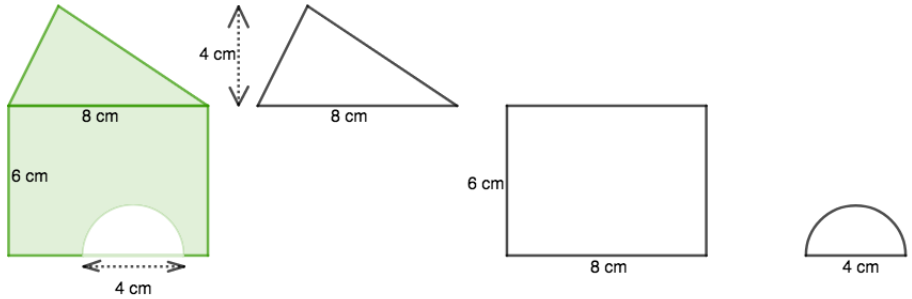
Exemple 90. Calculer l'aire de la figure de gauche revient à calculer simplement l'aire du rectangle de droite.



$\mathscr{A} = 6 \times 3 = 18$

La figure de gauche a une aire de 18 cm^2.

Exemple 91.



Pour calculer l'aire de la figure colorée, on la décompose en figures simples :

$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_3 = \dfrac{4 \times 8}{2} + 6 \times 8 - \dfrac{\pi \times 2^2}{2}$

$\mathscr{A} = 16 + 48 + 2\pi$

$\mathscr{A} = 64 - 2\pi$

L'aire exacte de cette figure est de $(64 - 2\pi)$ cm^2, soit 57,72 cm^2 au centième près.

10.5 Volumes

10.5.1 Unités de volume

Attention, le tableau de conversion pour les volumes comporte trois colonnes par unité :

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
														L	dL	cL	mL			

Les unités de contenance (L, dL, cL, etc.) sont également des unités de volume.

1 stère (unité de bois de chauffage) : 1 st = 1 m^3

Il faut absolument retenir l'égalité : 1 L = 1 dm^3

Exemple 92. $4,2\ m^3 = 4\ 200\ L$ $\quad$ $670\ dm^3 = 0,67\ m^3$ $\quad$ $24\ daL = 240\ dm^3$

$4,5\ m^3 = 4500\ dm^3$ $\quad$ $56\ L = 5\ 600\ cL$ $\quad$ $6,2\ dm^3 = 6,2\ L$

$13,1\ cm^3 = 0,0131\ dm^3$ $\quad$ $45,8\ hL = 4\ 580\ L$ $\quad$ $12\ m^3 = 12\ 000\ L$

$1\ 600\ mm^3 = 1,6\ cm^3$ $\quad$ $350\ cL = 3,5\ L$ $\quad$ $4\ 200 cm^3 = 4,2\ L$

10.5.2 Volume du cube et du pavé droit

Le volume d'un cube d'arête c est : $\mathscr{V}_{cube} = c^3$.

Le volume d'un pavé droit de longueur l, de largeur L et de hauteur h est : $\mathscr{V}_{pavédroit} = l \times L \times h$

Chapitre 11

Proportionnalité

11.1 Définition et tableau de proportionnalité

11.1.1 Grandeurs proportionnelles

Définition 36. Deux grandeurs sont proportionnelles si on peut calculer les valeurs de l'une en multipliant les valeurs de l'autre par un nombre, toujours le même, appelé coefficient de proportionnalité.

Exemple 93. Le prix payé pour un plein d'essence est proportionnel à la quantité d'essence achetée. La taille d'une personne n'est pas proportionnelle à son âge.

11.1.2 Reconnaître une situation de proportionnalité dans un tableau

Définition 37. Un tableau est un tableau de proportionnalité lorsque les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première ligne, par un même nombre, le coefficient de proportionnalité.

Exemple 94.

4	10	56
5	12,5	70

$$\frac{5}{4} = 1,25 \qquad \frac{12,5}{10} = 1,25 \qquad \frac{70}{56} = 1,25$$

Tous les quotients sont égaux donc c'est un tableau de proportionnalité.

Exemple 95.

10	12	14
8	10	12

$$\frac{8}{10} = 0,8 \qquad \frac{10}{12} \approx 0,83 \neq 0,8$$

Ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité.

Exemple 96.

2,5	10,9	6	84
2,05	8,938	4,92	68,88

$$\frac{2,05}{2,5} = 0,82 \qquad \frac{8,938}{10,9} = 0,82 \qquad \frac{4,92}{6} = 0,82 \qquad \frac{68,88}{84} = 0,82$$

Tous les quotients sont égaux donc c'est un tableau de proportionnalité.

Exemple 97.

1,3	9,1	6	10
6,76	47,32	31,14	52

$$\frac{6,76}{1,3} = 5,2 \qquad \frac{47,32}{9,1} = 5,2 \qquad \frac{31,14}{6} = 5,19 \neq 5,2$$

Ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité.

Exemple 98.

3	4,5	13	15
1	1,5	4,33	5

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{1,5}{4,5} = \frac{1}{3} \qquad \frac{4,33}{13} = \frac{433}{1300} \approx 0,33308 \neq \frac{1}{3}$$

Ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité.

11.2 Déterminer une quatrième proportionnelle

11.2.1 Retour à l'unité

Exemple 99. Le pouvoir couvrant d'une peinture est de 5 L pour 15 m^2.
Calculer les surfaces que l'on a recouvertes en utilisant 2 L, 13 L, 15 L et 32 L de peinture.

Avec 1 L de cette peinture, on peut recouvrir 3 m^2. Avec 2 L, on peut donc recouvrir 6 m^2, avec 13 L on peut recouvrir 39 m^2, avec 15 L, 45 m^2 et avec 32 L de peinture, on peut recouvrir 96 m^2.

11.2.2 Addition ou soustraction de colonnes

Exemple 100. Pour remonter l'ancre de son voilier, un marin a mis 3 minutes pour enrouler 21 m de chaîne. Lors d'une autre escale, il a mis 4 min 30 s pour 31,50 m.
En supposant qu'il le fasse à vitesse constante, combien de temps mettra-t-il pour remonter une ancre jetée à 10,50 m de fond ?

Temps pour remonter l'ancre en min	3	4,5	
Longueur de la chaîne en m	21	31,5	10,5

$10,5 = 31,5 - 21$, donc il suffit de faire $4,5 - 3 = 1,5$. Le marin mettra 1 min et 30 sec pour remonter une chaîne de 10,5 m.

11.2.3 Multiplication ou division d'une colonne

Exemple 101. La prime annuelle d'un vendeur est proportionnelle au montant des ventes qu'il a réalisées pendant l'année.
Le directeur du magasin utilise le tableau suivant pour verser les primes à ses vendeurs. Compléter le tableau.

Ventes en euros	2 000	8 000	
Primes en euros		500	1 000

2 000 = 8 000 : 4, donc on effectue 500 : 4 = 125.
1 000 = 500 × 2, donc on effectue 8 000 × 2 = 16000.

Remarque. On peut combiner la méthode précédente et celle-là.

11.2.4 Coefficient de proportionnalité

Exemple 102. On a versé 6 cL de grenadine dans un verre de 33 cL que l'on a ensuite rempli d'eau à ras bord.
Quelle quantité de grenadine devrais-je verser dans un verre de 55 cL pour obtenir exactement le même goût ?

Quantité de grenadine en cL	6	
Capacité du verre en cL	33	55

On effectue $55 : 5,5 = 10$. Je devrais donc verser 10 cL dans le verre de 55 cL pour obtenir le même goût.

11.3 Pourcentages

11.3.1 Utiliser un pourcentage

Exemple 103. Dans une classe de 30 élèves, il y a 40% de filles.
Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

Nombre de filles dans la classe	40	x
Nombre d'élèves en tout	100	30

$x = \dfrac{30 \times 2}{5} = 12.$ Il y a 12 filles dans cette classe.

11.3.2 Déterminer un pourcentage

Exemple 104. Dans un collège, trois élèves sur cinq possèdent un vélo. Quel est le pourcentage des élèves du collège qui possèdent un vélo ?

Nombre d'élèves qui ont un vélo	3	y
Nombre d'élèves en tout	5	100

$y = \dfrac{100 \times 3}{5} = 60.$ Il y a donc 60% des élèves de ce collège qui ont un vélo.

11.3.3 Appliquer une réduction ou une augmentation

Exemple 105. Un livre coûte 20 euros. Il subit une augmentation de 15%.
Quel est son nouveau prix ?

Prix initial en euros	20	100
Montant de l'augmentation en euros	z	15

$100 : 20 = 5$ $z = 15 : 5 = 3$ $20 + 3 = 23$
Le nouveau prix du livre est de 23€.

11.3.4 Déterminer un pourcentage de réduction ou d'augmentation

Exemple 106. Un jeu vidéo coûte 40 euros. Après une réduction, il coûte 35 euros.
A quel pourcentage du prix initial la réduction correspond-elle ?

On détermine d'abord le montant de la réduction : $40 - 35 = 5$.

Prix initial en euros	40	100
Montant de la réduction en euros	5	t

$40 : 5 = 8$ $t = 100 : 8 = 12,5$
La réduction correspond à 12,5% du prix initial.

11.4 Echelles

11.4.1 Définition

Définition 38. Les dimensions sur un plan (ou sur une carte) sont proportionnelles aux dimensions réelles. L'échelle du plan (ou de la carte) est le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir

les dimensions sur le plan en fonction des dimensions réelles.
Il s'exprime souvent sous forme fractionnaire : $\dfrac{\textit{dimensions sur le plan}}{\textit{dimensions réelles}}$.

Remarque. Attention, il faut que les dimensions soient exprimées dans la même unité.

11.4.2 Utiliser une échelle

Exemple 107. Sur une maquette à l'échelle $\dfrac{1}{48}$, quelle est la taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette ?
Et quelle est la taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m de long dans la réalité ?

Dimensions sur la maquette en cm	1	12	
Dimensions réelles en cm	48		720

La taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette est 576 cm (ou 5,76 m) et la taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m de long dans la réalité est 15 cm.

11.4.3 Déterminer une échelle

Exemple 108. 3 cm sur une carte correspondent à 360 km dans la réalité.
Déterminer, à l'aide d'une fraction de numérateur 1, l'échelle de cette carte .

On commence par exprimer les deux longueurs dans la même unité.
360 km = 360 000 m = 36 000 000 cm

L'échelle est donc de $\dfrac{3}{36\ 000\ 000}$. On simplifie la fraction : $\dfrac{3}{36\ 000\ 000} = \dfrac{1}{12\ 000\ 000}$.

La carte est à l'échelle $\dfrac{1}{12\ 000\ 000}$.

11.5 Proportion

Exemple 109. Dans la classe de 5e1, il y a 15 demi-pensionnaires sur les 20 élèves.
Dans la classe de 3e1, il y a 30 élèves et 25 demi-pensionnaires.
Y a-t-il la même proportion de demi-pensionnaires dans les deux classes ?
Si non, dans quelle classe y a-t-il proportionnellement le plus de demi-pensionnaires ?

$\dfrac{15}{20} = \dfrac{5 \times 3}{5 \times 4} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{25}{30} = \dfrac{5 \times 5}{5 \times 6} = \dfrac{5}{6}$

$\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{5}{6}$ donc il n'y a pas la même proportion de demi-pensionnaires dans les deux classes.

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \times 3}{4 \times 3} = \dfrac{9}{12}$

$\dfrac{5}{6} = \dfrac{5 \times 2}{6 \times 2} = \dfrac{10}{12} > \dfrac{9}{12}$

Il y a proportionnellement plus de demi-pensionnaires dans la classe de 3e1.

Chapitre 12

Parallélogrammes

12.1 Parallélogramme

12.1.1 Remarque préliminaire et définition

Il n'y a pas « une » définition du parallélogramme : si une propriété du type « Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ... » est vraie ainsi que sa réciproque, alors on peut utiliser cette propriété comme une définition. On a donc choisi une définition parmi toutes celle possibles.

Définition 39. Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.

Propriété 57. *Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.*

Propriété 58. *Si un quadrilatère a ses côté opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme.*

12.1.2 Propriétés

Propriété 59. *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors il a un centre de symétrie qui est le point d'intersection des diagonales (centre du parallélogramme).*

Propriété 60. *Si un quadrilatère non croisé a un centre de symétrie, alors c'est un parallélogramme.*

Propriété 61. *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.*

Propriété 62. *Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.*

Propriété 63. *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côté opposés sont de même longueur.*

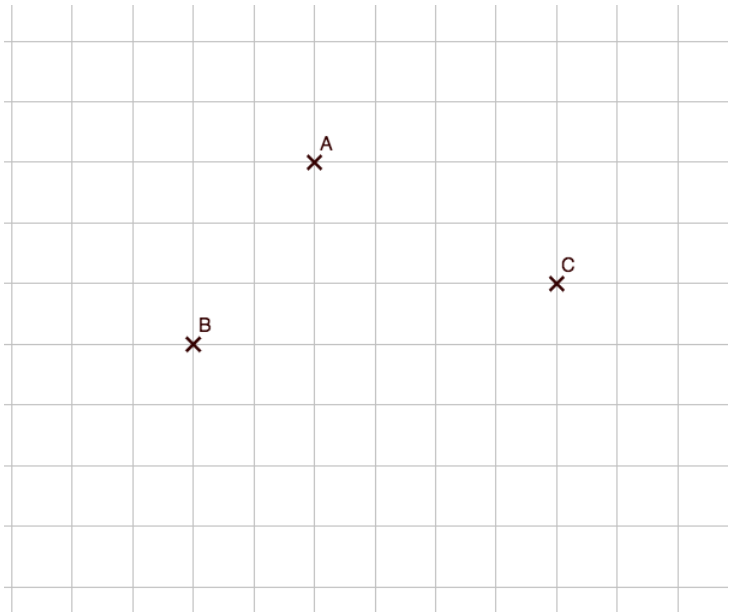
Propriété 64. *Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.*

Propriété 65. *Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.*

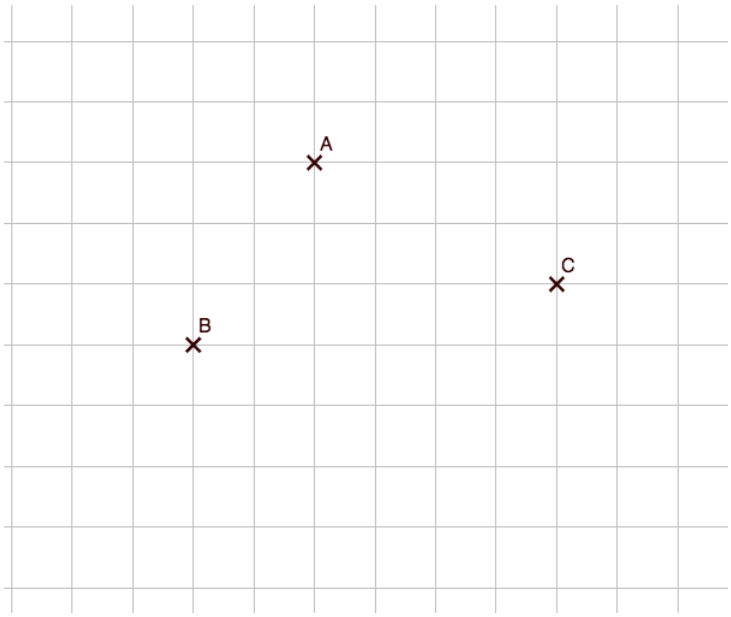
Propriété 66. *Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés ont la même mesure et ses angles consécutifs sont supplémentaires.*

12.1.3 Constructions

Exemple 110. Soient trois points A, B et C non alignés placés dans un quadrillage comme ci-dessous.
Placer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

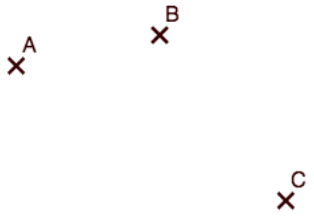


Méthode 1 : on utilise la propriété « si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur. ».
On commence par visualiser où le point D va se trouver approximativement.
Pour aller de B à C, on compte 6 carreaux vers la droite et on monte de un carreau. Pour aller de A à D, on reproduit ce déplacement.



Méthode 2 : on utilise la propriété « Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu. ».
Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$. On place le milieu I de $[AC]$ puis on place le point D tel que I soit le milieu de $[BD]$.

Exemple 111. Soient trois points A, B et C non alignés. Construire au compas le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.



On commence par repérer dans quelle zone va se trouver le point D.
On reporte au compas la longueur AB à partir du point C. On trace un arc de cercle.
On reporte au compas la longueur BC à partir du point A. On trace un deuxième arc de cercle.
A l'intersection des deux arcs de cercle se trouve le point D.

12.2 Rectangle, losange, carré

12.2.1 Propriétés directes

Propriété 67. *Le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes (car leur côté opposés sont parallèles).*

Propriété 68. *Si un quadrilatère est un rectangle ou un carré, alors il a quatre angles droits.*

Propriété 69. *Si un quadrilatère est un losange ou un carré alors il a ses quatre côtés de même longueur.*

12.2.2 Propriétés avec les diagonales

Propriété 70. *Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.*

Propriété 71. *Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.*

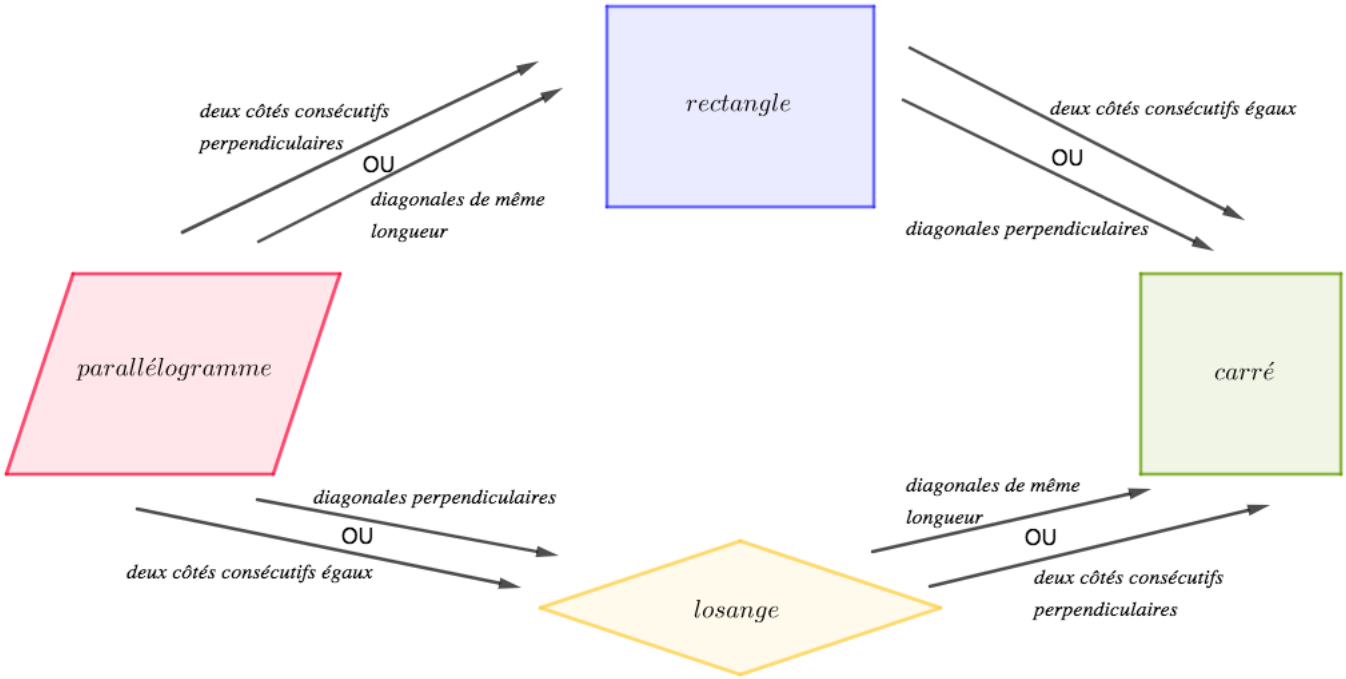
Propriété 72. *Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur et perpendiculaires, alors c'est un carré.*

12.2.3 Autres propriétés

Propriété 73. *Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.*

Propriété 74. *Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.*

Propriété 75. *Si un parallélogramme a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.*


rectangle
deux côtés consécutifs perpendiculaires
OU
diagonales de même longueur
deux côtés consécutifs égaux
OU
diagonales perpendiculaires
parallélogramme
carré
diagonales perpendiculaires
OU
deux côtés consécutifs égaux
diagonales de même longueur
OU
deux côtés consécutifs perpendiculaires
losange

Chapitre 13

Géométrie dans l'espace

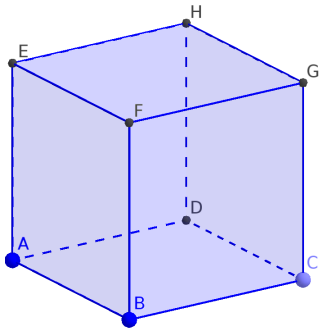
Définition 40. Un polyèdre est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

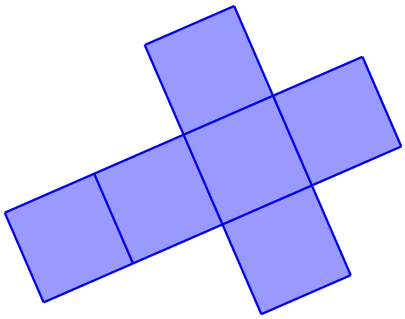
Définition 41. Un polyèdre est dit régulier si toutes ses faces sont identiques et régulières (i.e. côtés de la même longueur et angles de la même mesure) et si tous les sommets sont identiques (i.e. même nombre d'arêtes qui convergent à chaque sommet).

13.0.1 Le cube

Définition 42. Un cube est un polyèdre régulier dont toutes les faces sont des carrés.

Remarque. Le cube a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Toutes les faces sont des carrés identiques.





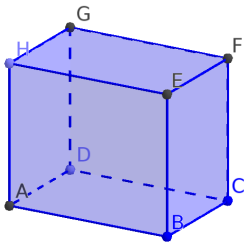
Il y a 11 patrons de cube différents.

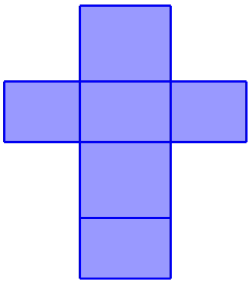
Propriété 76. *Le volume d'un cube d'arête c est : $V = c^3$*

13.0.2 Le parallélépipède rectangle

Définition 43. Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont toutes les faces sont des rectangles.

Remarque. Le parallélépipède rectangle est aussi appelé le pavé droit. Il a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes. Ses faces sont des rectangles identiques deux à deux. Le cube est un cas particulier de pavé droit.





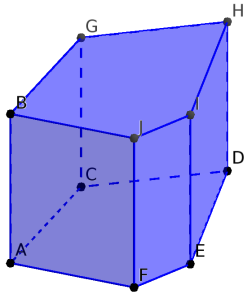
Propriété 77. *Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur l, de largeur L, et de hauteur h est : $V = l \times L \times h$*

13.0.3 Le prisme droit

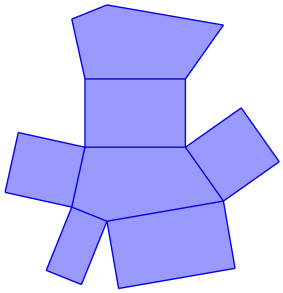
Définition 44. Un prisme droit est un polyèdre qui a deux faces, parallèles et superposables, appelées les bases, et dont les autres faces, appelées les faces latérales, sont des rectangles.

Définition 45. La distance entre les deux bases est appelée la hauteur du prisme.

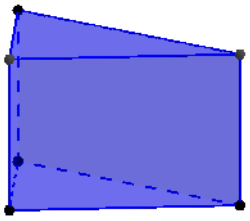
Remarque. On parle ainsi de prisme droit à base triangulaire, de prisme droit à base hexagonale, etc., suivant la nature des bases.
Le pavé droit (et donc le cube) sont des cas particuliers de prismes droits.



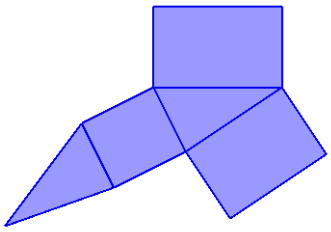
Prisme droit à base pentagonale



Patron d'un prisme droit à base pentagonale



Prisme droit à base triangulaire



Patron d'un prisme droit à base triangulaire

Définition 46. On appelle l'aire latérale d'un prisme l'aire de l'ensemble des faces latérales.

Remarque. On calcule donc l'aire latérale d'un prisme par la somme d'aires de rectangles.

Propriété 78. *L'aire d'un prisme droit est égale à la somme de l'aire latérale et du double de l'aire d'une base.*

Propriété 79. *Le volume d'un prisme droit est égale au produit de l'aire d'une de ses bases par la hauteur du prisme : $V_{prisme} = A_{base} \times h$*

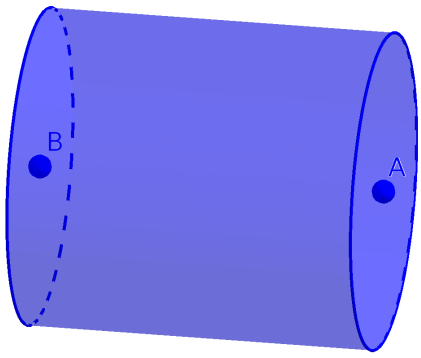
13.0.4 Le cylindre de révolution

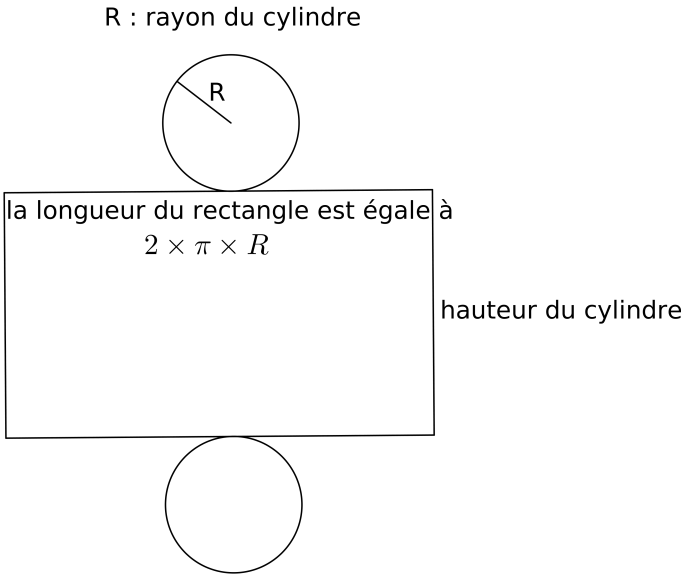
Définition 47. Le cylindre de révolution est obtenu par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés.

Remarque. « Révolution » vient du latin « revolvere » formé à partir de la racine « volv- » signifiant « rouler ».

Le cylindre de révolution possède deux faces, identiques et parallèles, qui sont des disques (et une face courbe). La droite joignant les centres de chaque base est perpendiculaire aux bases.

Définition 48. La distance entre les deux bases est appelée la hauteur du cylindre.





Propriété 80. *L'aire latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à :* $A_{lat} = 2\pi Rh$

Propriété 81. *L'aire totale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à :* $A_{tot} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

Propriété 82. *Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égale à :* $V = \pi R^2 h$

Chapitre 14

Gestion de données

14.1 Effectifs et fréquences

Voici un exemple qui va être utile pour poser les bases de vocabulaire de ce chapitre. On a demandé aux 29 élèves d'une classe de 5e combien ils avaient de frères ou de sœurs. Les réponses obtenues sont :
1 ; 4 ; 0 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 0 ; 0 ; 2 ; 5 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0.

Définition 49. Chaque réponse d'élève est appelée une donnée.

Définition 50. La liste de ces 29 données est une série statistique.

Définition 51. Les valeurs prises par ce caractère sont les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

Remarque. Il ne faut pas confondre les valeurs et les données. Il y a ici 29 données, mais seulement 6 valeurs.

Définition 52. L'effectif total d'une série statistique est le nombre de données dans la série.

Exemple 112. Dans l'exemple-modèle, l'effectif total est 29.

Définition 53. L'effectif d'une valeur donnée est le nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série.

Exemple 113. Dans l'exemple-modèle, l'effectif de la valeur 2 est 7.

Remarque. Pour lire plus facilement les données d'une série statistique, on peut les regrouper et les organiser dans un tableau.

Nombre de frères et de sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	11	7	3	2	1

Définition 54. La somme de tous les effectifs est égal à l'effectif total.

Définition 55. La fréquence d'une valeur donnée est le quotient de l'effectif de la valeur par l'effectif total.
Une fréquence peut s'exprimer à l'aide d'une fraction, d'un pourcentage ou d'une écriture décimale.

Exemple 114. Dans l'exemple-modèle, l'effectif de la valeur 4 est 2, sur un effectif total de 29. La fréquence de la valeur 4 est donc $\frac{2}{29}$.

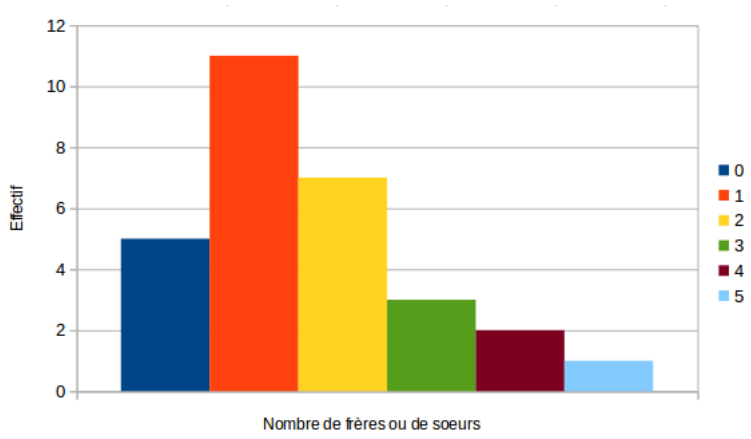
Nombre de frères et de sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	11	7	3	2	1
Fréquence	$\frac{5}{29}$	$\frac{11}{29}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{3}{29}$	$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{29}$

14.2 Représentations graphiques

On peut représenter une série de données par un tableau, ou par différents types de graphiques : diagramme en barres ou en bâtons, circulaire (ou semi-circulaire), histogramme, courbe.

Propriété 83. *Dans un diagramme en bâtons, la hauteur de chaque bâton est proportionnelle à l'effectif de la valeur qu'il représente.*

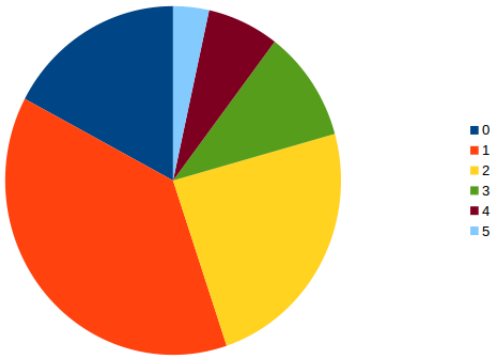
Remarque. Les bâtons sont espacés alors que les barres sont « collées ».



Propriété 84. *Dans un diagramme circulaire, la mesure de l'angle de chaque secteur est proportionnelle à l'effectif de la valeur qu'il représente.*

Exemple 115. Dans l'exemple-modèle, on calcule l'angle qui correspond à la valeur 4 : $\frac{2}{29} \times 360 \approx 25$

Nombre de frères et de sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	11	7	3	2	1
Angle en degré	62	137	87	37	25	12



Propriété 85. *Dans un histogramme, c'est l'aire de chaque rectangle qui est proportionnelle à l'effectif de la valeur qu'il représente.*

Remarque. Le terme « histogramme » est souvent employé à tort. Il s'agit le plus souvent de diagrammes en barres.

14.3 Moyenne

Définition 56. La moyenne d'une série de données est le nombre égal à la somme des données divisée par l'effectif total de la série.

Exemple 116. Dans l'exemple-modèle, on a :

$$\frac{1+4+1+1+3+3+4+2+2+1+1+3+2+2+1+2+5+2+1+1+1+2+1+1}{29} = \frac{47}{29}$$

Chaque élève de la classe a donc, en moyenne, 1,62 frère ou sœur.

14.4 Regroupement de données en classe

Définition 57. Quand les données récoltées sont nombreuses et diverses, il est souvent plus judicieux de faire des groupes. On dit alors qu'on regroupe les données en classe.

Exemple 117. On étudie la taille des adhérents à un club de basket. A u lieu de demander la taille précise de chacun des adhérents, on leur demande dans quelle catégorie ils se trouvent : entre 1,70 m et 1,80 m, entre 1,70 et 1,80 m, entre 1,80 m et 1,90 m, entre 1,90 m et 2 m, entre 2 m et 2,10 m, ou entre 2,10 m et 2,20 m. On obtient donc 6 classes.

Définition 58. L'amplitude d'une classe est la différence entre la limite supérieure de la classe et la limite inférieure.

Exemple 118. Dans l'exemple précédent, l'amplitude de chaque classe est de 0,10 m.

Remarque. Le plus souvent les amplitudes des classes seront identiques, pour faciliter la représentation graphique en histogramme.

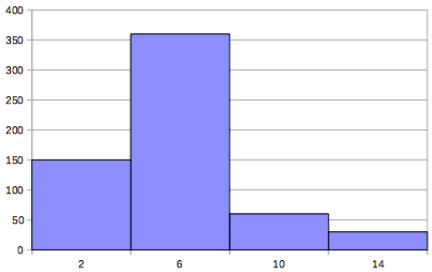
Remarque. Pour calculer la moyenne dans le cas d'un regroupement en classe, on considère que l'effectif de chaque classe est pondéré par la valeur centrale de la classe.

Exemple 119. Une entreprise a réalisé une étude portant sur la masse des colis expédiés. Elle a obtenu le tableau suivant :

Masse des colis en kg	Effectif
$0 \leqslant m < 4$	150
$4 \leqslant m < 8$	360
$8 \leqslant m < 12$	60
$12 \leqslant m < 16$	30

Les données ont été rangées en 4 classes, chacune d'amplitude 4.

Pour calculer la moyenne, on considère que 150 colis avaient une masse de 2 kg (centre de la première classe), 360 une masse de 6 kg, 60 une masse de 10 kg et 30 une masse de 14 kg.

$$\frac{150 \times 2 + 360 \times 6 + 60 \times 10 + 30 \times 14}{150 + 360 + 60 + 30} = \frac{3480}{600} = 5,8$$

La masse moyenne des colis expédiés par cette entreprise est de 5,8 kg.