

Chapitre 11

Nombres positifs en écriture fractionnaire

11.1 Rappels

11.1.1 Vocabulaire

Définition 33. Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$. Le quotient de a par b peut s'écrire $\frac{a}{b}$: c'est une écriture fractionnaire. a est appelé le numérateur, et b le dénominateur.

Définition 34. Si a et b sont deux nombres entiers, $\frac{a}{b}$ est une fraction.

11.1.2 Remarques

Tout nombre décimal sous s'écrire sous forme d'une fraction. Un nombre décimal est d'ailleurs défini comme un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (c'est-à-dire 10, 100, 1 000, 10 000, etc.).

Exemple 81. $5,03 = \frac{503}{100} = \frac{50300}{10000} = \dots$

$$89,5 = \frac{895}{10} = \dots$$

$$456 = \frac{456}{1} = \frac{4560}{10} = \dots$$

L'inverse est faux : toute fraction ne peut pas s'écrire sous forme d'un nombre décimal. Attention, un nombre décimal n'est donc pas simplement « un nombre à virgule ».

Exemple 82. $\frac{1}{3}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre décimal.

$\frac{1}{3} \approx 1,3333$. On peut seulement donner une valeur approchée de $\frac{1}{3}$ avec une précision donnée.

11.2 Égalité et simplification

Propriété 41. On ne change pas un nombre en écriture fractionnaire en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Autrement dit :

Soient a , b , et k trois nombres avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$. Alors : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$

Exemple 83. $\frac{3}{4,2} = \frac{3 \times 10}{4,2 \times 10} = \frac{30}{42} = \frac{30 : 6}{42 : 6} = \frac{5}{7}$

Définition 35. Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits que ceux de la fraction d'origine.

Exemple 84. $\frac{15}{6} = \frac{3 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{2}$

$$\frac{60}{45} = \frac{15 \times 4}{15 \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{8}{32} = \frac{8 \times 1}{8 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{132}{11} = \frac{11 \times 12}{11} = 12$$

Remarque. Lorsque l'on ne peut plus simplifier une fraction, on dit qu'elle est irréductible.

11.3 Comparaison

11.3.1 Avec le même numérateur

Propriété 42. Si deux fractions ont le même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.

Exemple 85. $\frac{3}{7} > \frac{3}{8}$ car $7 < 8$

11.3.2 Avec le même dénominateur

Propriété 43. Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.

Exemple 86. $\frac{4}{17} < \frac{5}{17}$ car $4 < 5$

Exemple 87. Rangeons dans l'ordre croissant les fractions suivantes : $\frac{13}{18}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{22}{36}$.

Ces fractions n'ont pas le même dénominateur, mais on peut facilement réduire toutes les fractions au même dénominateur, 18 par exemple.

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 2}{9 \times 2} = \frac{10}{18}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{12}{18}$$

$$\frac{22}{36} = \frac{22 : 2}{36 : 2} = \frac{11}{18}$$

Or $\frac{10}{18} < \frac{11}{18} < \frac{12}{18} < \frac{13}{18}$ donc $\frac{5}{9} < \frac{22}{36} < \frac{2}{3} < \frac{13}{18}$.

11.4 Différentes écritures d'un même nombre

Suivant le type d'exercice, les manipulations à faire sur un nombre en écriture fractionnaire ne sont pas les mêmes.

- Un résultat de calcul doit être donné sous la forme la plus simple possible, il faut alors simplifier la fraction.

- Pour comparer des fractions, les additionner ou les soustraire (ce qu'on verra dans un prochain chapitre), il faut qu'elles aient le même dénominateur, donc dans ce cas il faut au contraire les « compliquer ».

Exemple 88. Additionner huit neuvièmes et quatre neuvièmes.

$$\frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \times 4}{3 \times 3} = \frac{4}{3}$$

- Pour encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs, il est plus simple d'écrire la fraction comme la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1.

Exemple 89. Encadrer par deux nombres entiers consécutifs $\frac{127}{8}$:

$$\frac{127}{8} = \frac{8 \times 15 + 7}{8} = 15 + \frac{7}{8} \text{ donc } 15 < \frac{127}{8} < 16$$

- Pour passer d'une proportion à un pourcentage, on va utiliser le principe d'égalité des fractions pour obtenir un dénominateur égal à 100.

Exemple 90. Trois cinquièmes des élèves d'une classe viennent en vélo. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} \text{ donc } 60\% \text{ des élèves de la classe viennent en vélo.}$$